

Aleksėjus BOGDANOVIČIUS

FIZIKA

I



Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2009

AIŠKINAMASIS UŽDAVINYNAS

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Aleksėjus Bogdanovičius

Fizika 1

Aiškinamasis uždavinynas

Scanned by
Cloud Dancing



LEIDYKLA
TECHNIKA
Vilnius 2009

UDK 53(076)
Bo-99

Aleksėjus Bogdanovičius. Fizika 1. Aiškinamasis uždavinynas. 3-ioji laida. Vilnius: Technika, 2009. 92 p.

Aiškinamajame uždavinyne pateikti slenkamojo bei sukamojo judėjimo kinematikos ir dinamikos, mechaninių svyravimų ir bangų, molekulinės fizikos ir termodinamikos uždavinių sprendimo pavyzdžiai.

Uždavinynas skirtas studijuojantiesiems bendrosios fizikos kursą pagal „Fizika 1" modulį.

Leidinį rekomendavo VGTU Fundamentinių mokslų fakulteto Studijų komitetas

Recenzavo prof. habil. dr. D. Styra ir doc. dr. L. Syrus

VGTU leidyklos „Technika" 803-S mokomosios metodinės literatūros knyga
1-oji pataisyta laida, 2005
2-oji pataisyta laida, 2006

ISBN 978-9986-05-909-7

© A. Bogdanovičius, 2005
© VGTU leidykla „Technika", 2005

Turinys

Pratarmė 4

Slenkamojo ir sukamojo judėjimo kinematika 5

Slenkamojo ir sukamojo judėjimo dinamika 22

Mechaniniai svyravimai ir bangos 42

Molekulinė fizika ir termodinamika 59

I priedas. Pagrindinių knygoje taikomų fizikinių dydžių žymėjimai ir SI sistemos matavimo vienetai 84

II priedas. Knygoje taikomos fizikinės konstantos 87

III priedas. Kartotiniai ir daliniai vienetai 88

IV priedas. Pagrindinės diferencijavimo ir integravimo formulės 89

Pratarmė

Aiškinamasis uždavinynas skirtas studentams, studijuojantiems bendrosios fizikos kursą pagal „Fizika 1" modulį. Uždavinyne pateikti 60 slenkamojo bei sukamojo judėjimo kinematikos (Nr. 1–15) ir dinamikos (Nr. 16–32), mechaninių svyravimų ir bangų (Nr. 33–42), molekulinės fizikos ir termodinamikos (Nr. 43–60) uždavinių sprendimo pavyzdžiai. Visur taikoma SI matavimo vienetų sistema. Daugumos uždavinių sprendimo rezultatai aptariami ir analizuojami. Tokia analizė leidžia nuodugniau suprasti uždaviniuose aprašomų fizikinių reiškinių esmę. Kad būtų lengviau suvokti sprendimo eigą, knyga yra gausiai iliustruota. Paveikslų numerių pirmieji skaičiai atitinka uždavinio numerį.

Prieduose pateikti uždavinyne naudojami pagrindinių fizikinių dydžių žymėjimai bei SI sistemos matavimo vienetai, fizikinių konstantų ir kartotinių bei dalinių vienetų lentelės.

Autorius nuoširdžiai dėkingas už pastabas knygos recenzentams prof. habil. dr. D. Styrai ir doc. dr. L. Syrui.

Slenkamojo ir sukamojo judėjimo kinematika

1. Materialiojo taško judėjimo lygtis SI sistemoje tokia:

$$x(t) = 8 - 6\,t + 3\,t^2 - 0{,}3\,t^3.$$

Dydžiai pateikti SI sistemos vienetais. Nubrėžkite koordinatės $x(t)$, greičio $v(t)$ ir pagreičio $a(t)$ grafikus. Raskite vidutinį greitį laiko intervale $t = (2-5)\,\mathrm{s}$. Kam lygus pagreitis tuo laiko momentu, kai greitis yra didžiausias?

Sprendimas

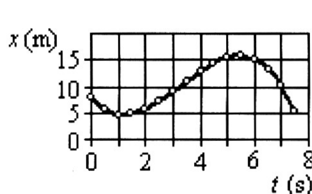
1) Greičio lygtis:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -6 + 6t - 0{,}9\,t^2 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right).$$

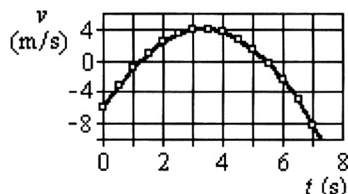
Pagreičio lygtis:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 6 - 1{,}8\,t \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right).$$

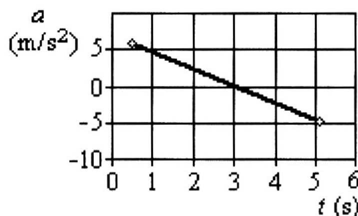
Koordinatės, greičio ir pagreičio lygčių grafikai pateikti 1.1, 1.2 ir 1.3 pav. Pagreičio grafikui (tiesei) nubrėžti užtenka dviejų taškų.



1.1 pav.



1.2 pav.



1.3 pav.

2) Vidutinis taško greitis laiko intervale nuo antros iki penktos sekundės:

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(5)-x(2)}{5-2} = 3{,}3\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

3) Funkcijos $v(t)$ ekstremumo (šiuo atveju maksimumo) sąlyga: $\frac{dv(t)}{dt} = 0$. Kadangi $a = \frac{dv(t)}{dt}$, tai akivaizdu, kad maksimalaus greičio momentu $a = 0$.

2. Materialiojo taško sukamojo judėjimo lygtis SI sistema: $\varphi(t) = 8 + 6t - 3t^2 + 0{,}3t^3$. Nubrėžkite kampinės koordinatės $\varphi(t)$, kampinio greičio $\omega(t)$ ir kampinio pagreičio $\varepsilon(t)$ grafikus. Raskite vidutinį kampinį greitį laiko intervale nuo antros iki ketvirtos sekundės. Kiek apsisukimų padarė taškas nuo pirmos iki šeštos sukimosi sekundžių?

Sprendimas

1) Kampinio greičio lygtis:

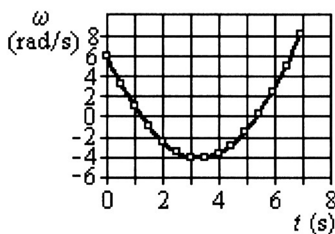
$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = 6 - 6t + 0{,}9t^2\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right).$$

Kampinio pagreičio lygtis:

$$\varepsilon(t) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -6 + 1{,}8t\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right).$$

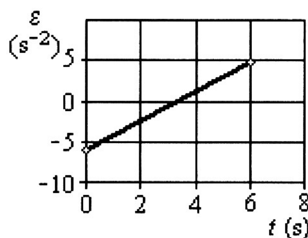


2.1 pav.



2.2 pav.

Kampinės koordinatės $\varphi(t)$, kampinio greičio $\omega(t)$ ir kampinio pagreičio $\varepsilon(t)$ grafikai pateikiami 2.1, 2.2 ir 2.3 pav.



2.3 pav.

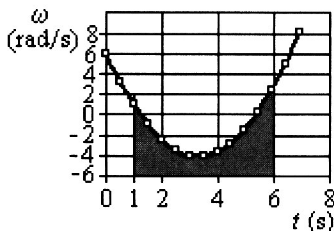
2) Vidutinis kampinis greitis laiko intervale nuo antros iki ketvirtos sekundės:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(4)-\varphi(2)}{4-2} = -3{,}6\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right).$$

3) Kampinis taško poslinkis nuo pirmos iki šeštos sukimosi sekundžių:

$$\Delta\varphi = \varphi(6)-\varphi(1) = -8{,}9\,(\text{rad}).$$

Per šį laiką taškas du kartus keičia sukimosi kryptį (kampinio greičio grafikas du kartus kerta laiko ašį, einančią per tašką $\omega = 0$) ir padaro $N = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi} \approx -1{,}4$ aps., t. y. pasisuka priešinga pradiniam kampiniam poslinkiui kryptimi.



2.4 pav.

Skaičius N geometriškai lygus plotui, kurį $\omega(t)$ grafike riboja grafiko kreivė, t ašis ir statmenys, iškelti iš taškų $t_1 = 1\,\text{s}$ ir $t_2 = 6\,\text{s}$ (2.4 pav. šis plotas patamsintas).

3. Kūno greičio lygtis tokia:

$$v_x(t) = 4 + 2t - 0{,}3t^2\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

Kiek pakito kūno koordinatė x per pirmąsias 2 s ? per 14 s ? Nubrėžkite kūno koordinatės $x(t)$ ir greičio $v(t)$ grafikus.

Sprendimas

Kūno koordinatės pokytis Δx išreiškiamas greičio lygtimi taip:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)dt \,. \qquad (3.1)$$

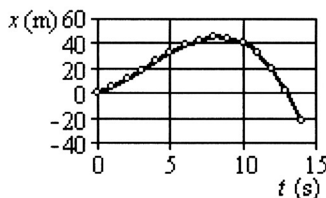
Iš čia pirmajam atvejui gauname:

$$(\Delta x)_1 = \int_0^2 (4 + 2t - 0{,}3t^2)dt = (4t + t^2 - 0{,}1t^3)\Big|_0^2 = 11{,}2\,(\text{m}),$$

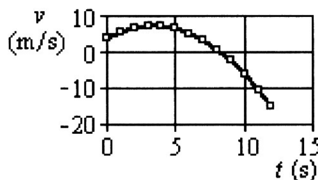
t. y. kūno koordinatė padidėjo 11,2 m.

Antruoju atveju kūnas pakeitė judėjimo kryptį (greičio grafikas kerta t ašį) ir jo koordinatė x tapo neigiamoji:

$$(\Delta x)_2 = \int_0^{14} (4 + 2t - 0{,}3t^2)dt = (4t + t^2 - 0{,}1t^3)\Big|_0^{14} = -22{,}4\,(\text{m}).$$



3.1 pav.



3.2 pav.

Kūno koordinatės $x(t)$ ir greičio $v(t)$ grafikai pateikti 3.1 ir 3.2 paveiksluose.

4. Kūno pagreičio lygtis $a_x(t) = -3 + 0{,}2t\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$. Kiek pakito kūno greitis $v(t)$ per 90 s ? Paaiškinkite gautą rezultatą greičio grafike. Nubrėžkite kūno judėjimo lygties $x(t)$ grafiką, jei $x(0) = 4$ m.

Sprendimas

1) Kūno greičio pokytis Δv išreiškiamas pagreičio lygtimi taip:

$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$. Iš čia gauname:

$$(\Delta v)_1 = \int_0^{30} (-3 + 0{,}2t)dt = \left(-3t + 0{,}1t^2\right)\Big|_0^{30} = 0\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

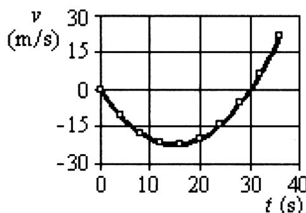
Greičio grafike (4.1 pav.) matome, kad iš pradžių greitis mažėjo nuo nulio (tapo neigiamasis), o paskui didėjo ir praėjus 30 s vėl tapo lygus nuliui.

2) Kūno judėjimo lygtį gauname iš jo greičio lygties taip:

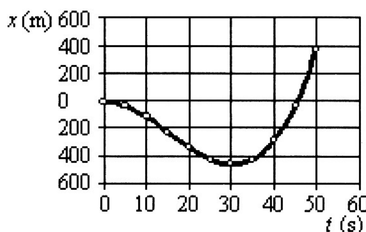
$$x(t) = \int v(t)dt + C = \int\left(-3t + 0{,}1t^2\right)dt + C = -1{,}5t^2 + 0{,}033t^3 + C.$$

Kadangi $x(0) = C$, tai $C = 4$ m . Taigi judėjimo lygtis –

$x(t = 4 - 1{,}5t^2 + 0{,}033t^3(\text{m})$.



4.1 pav.



4.2 pav.

Šios lygties grafikas yra kubinė parabolė (4.2 pav.).

5. x ašimi judančio taško greičio lygtis $v(t) = 2\cos(6{,}28t)$. Raskite taško judėjimo lygtį $x(t)$, laikydami $x(0) = 0$, ir pagreičio lygtį $a(t)$. Raskite taško svyravimų amplitudę, ciklinį bei linijinį dažnį ir periodą, taško koordinatę, greitį ir pagreitį laiko momentu $t = 0{,}15$. Nubrėžkite taško koordinatės $x(t)$, greičio $v(t)$ ir pagreičio $a(t)$ grafikus. Visi duomenys pateikti SI sistemos vienetais.

Sprendimas

1) Taško judėjimo lygtis išreiškiama greičio lygtimi:

$$x(t) = \int v(t)dt + C = \int 2\cos(6{,}28t)dt + C = 0{,}32\sin(6{,}28t) + C.$$

Konstantą C nustatoma iš pradinių sąlygų. Kadangi $x(0) = 0$, $0 = 0{,}32\sin(6{,}28 \times 0) + C$. Iš čia $C = 0$. Tada taško judėjimo lygtis:

$$x(t) = 0{,}32\sin(6{,}28t)(\text{m}). \qquad (5.1)$$

2) Taško pagreičio lygtis išreiškiama greičio lygtimi:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -12{,}56\sin(6{,}28t)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right). \qquad (5.2)$$

3) (5.1) lygties bendroji forma $x = x_0\sin(\omega t + \varphi_0)$. Palyginę ją su (5.1) lygtimi, matome, kad taško svyravimų amplitudė $x_0 = 0{,}32$ m, ciklinis dažnis $\omega = 6{,}28$ Hz, dažnis $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1$ Hz, periodas $T = \frac{1}{\nu} = 1$ s.

4) Taško koordinatę, greitį ir pagreitį laiko momentu $t = 0{,}15$ s gauname, įrašę laiko reikšmę į šių dydžių lygtis:

taško koordinatė

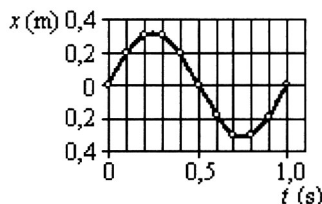
$$x(0{,}15) = 0{,}32\sin(6{,}28 \times 0{,}15) = 0{,}26\ (\text{m}),$$

taško greitis

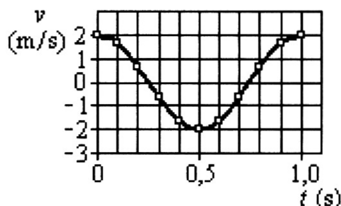
$$v(0{,}15) = 2\cos(6{,}28 \times 0{,}15) = 1{,}18\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right),$$

taško pagreitis

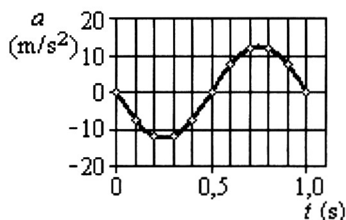
$$a(1{,}5)=-12{,}56\sin(6{,}28\times 1{,}5)=-10{,}16\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right).$$



5.2 pav.



5.1 pav.



5.3 pav.

Koordinatės $x(t)$, greičio $v(t)$ ir pagreičio $a(t)$ grafikai pateikti 5.1, 5.2 ir 5.3 paveiksluose.

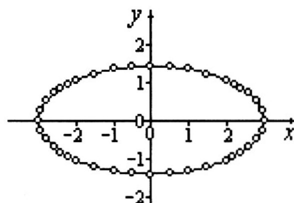
6. Plokštumoje judančio taško koordinačių priklausomybių nuo laiko lygtys: $x=3\sin\omega t$, $y=\sqrt{2}\cos\omega t$. Raskite taško trajektorijos lygtį ir nubrėžkite jo trajektoriją.

Sprendimas

$x^2=9\sin^2\omega t$, $y^2=2\cos^2\omega t$.

$$\frac{x^2}{9}=\sin^2\omega t,\ \frac{y^2}{2}=\cos^2\omega t.$$

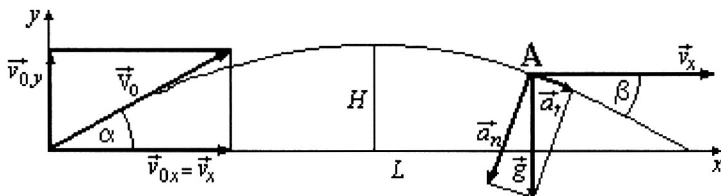
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1.$$



6 pav.

Sudėję du statmenus harmoninius svyravimus, gavome vieną iš vadinamųjų Lisažu figūrų – šiuo atveju elipsę (6 pav.).

7. Akmuo mestas greičiu $v_0 = 20\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ kampu $\alpha = 30^\circ$ į horizontą (7.1 pav.). Raskite: 1) akmens greičio modulio priklausomybę nuo laiko $v = v(t)$ ir kampo tarp greičio vektoriaus ir x ašies priklausomybę nuo laiko $\beta = \beta(t)$; 2) akmens trajektorijos lygtį $y = f(x)$; 3) po kiek sekundžių t_1 akmuo nukris į horizontalųjį paviršių, einantį per metimo tašką; 4) didžiausią akmens pakilimo aukštį H ; 5) nuotolį L tarp metimo ir kritimo taškų; 6) įcentrinį bei tangentinį pagreičius taške, kuriame akmuo bus praėjus $t_2 = 1{,}6$ s ; 7) trajektorijos kreivumo spindulį šiame taške. Oro pasipriešinimo nepaisykite.



7.1 pav.

Žinoma: $v_0 = 20\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, $\alpha = 30^\circ$, $t_2 = 1{,}6$ s .

Rasti: $y = f(x), t_1$, H , L, a_n, a_t, R .

Sprendimas

Judėjimų nepriklausomumo principas leidžia nagrinėti mesto akmens judėjimą kaip dviejų nepriklausomų judėjimų sumą:

tolyginio judėjimo x ašies kryptimi greičiu

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \tag{7.1}$$

ir tolygiai kintamojo judėjimo y ašies kryptimi greičiu

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt . \tag{7.2}$$

Judėjimo x ašies kryptimi lygtis:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t . \tag{7.3}$$

Judėjimo y ašies kryptimi lygtis:

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (7.4)$$

1) Bet kuriuo laiko momentu akmens greičio modulis –

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} =$$

$$\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2}.$$

Kampas β tarp greičio vektoriaus ir x ašies randamas iš lygties $\mathrm{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x}$:

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \mathrm{arctg}\frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}. \qquad (7.5)$$

Greičio modulis ir kampas tarp greičio vektoriaus ir x ašies nusako greičio vektorių $\vec{v}$.

2) Eliminuodami iš (7.3) ir (7.4) lygčių laiką t, gauname trajektorijos lygtį $y = f(x)$:

$$y = x\,\mathrm{tg}30^\circ - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0{,}58\,x - 0{,}016\,x^2. \qquad (7.6)$$

(7.6) yra parabolės lygtis. Kai laisvai krintančio kūno greitis yra mažesnis už pirmąjį kosminį greitį, kūno trajektorija visada yra parabolė arba tiesė.

3) Aukščiausiame trajektorijos taške $v_y = 0$ (t. y. akmuo tą akimirką nejuda y ašies kryptimi), todėl iš (7.2) gauname laiką t_H, per kurį akmuo pasieks didžiausią aukštį H:

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt_H$$

arba

$$t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (7.7)$$

Tiek pat laiko akmuo kris atgal į horizontalųjį paviršių (parabolės šakos yra simetriškos), todėl visas laikas nuo metimo iki kritimo bus toks:

$$t_1 = 2t_H = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 2{,}04\ (\mathrm{s}).$$

4) Didžiausią akmens pakilimo aukštį H randame, įrašę į (7.4) kilimo laiką t_H:

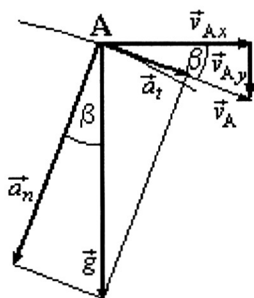
$$H = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 5{,}1\ (\mathrm{m}).$$

5) Nuotolį L tarp metimo ir kritimo taškų randame, įrašę į (7.3) laiką t_1:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = 35{,}4\ (\mathrm{m}).$$

Iš šios formulės matome, kad didžiausia L vertė gaunama, kai $\sin(2\alpha) = 1$, t. y. $\alpha = 45^\circ$, jei nepaisoma oro pasipriešinimo.

6) Kadangi akmenį veikia tik sunkio jėga, bet kuriame trajektorijos taške jis juda pagreičiu $\vec{g}$, kurį galima laikyti dviejų tarpusavyje statmenų pagreičių (tangentinio $\vec{a}_t$ ir įcentrinio $\vec{a}_n$) suma. Todėl $\vec{g} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ ir $g = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. Tangentinis pagreitis $\vec{a}_t$ nukreiptas liestinės į trajektoriją kryptimi, t. y. sutampa su greičio kryptimi nagrinėjamame taške A (žr. 7.1 paveikslą ir jo padidintą fragmentą 7.2 pav.). Kampas β tarp greičio $\vec{v}_A$ taške A ir horizontaliosios greičio komponentės $\vec{v}_{Ax}$ yra lygus kampui tarp laisvojo kritimo pagreičio $\vec{g}$ ir įcentrinio pagreičio $\vec{a}_n$ (čia yra kampai su tarpusavyje statmenomis kraštinėmis), o kampas tarp laisvojo kritimo pagreičio $\vec{g}$ ir tangentinio pagreičio $\vec{a}_t$ lygus $(90^\circ - \beta)$.



7.2 pav.

Iš (7.5) gauname kampą β:

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v_0 \sin\alpha - gt_2}{v_0 \cos\alpha} = -18^\circ .$$

Iš brėžinio matome, kad įcentrinis ir tangentinis pagreičiai yra laisvojo kritimo pagreičio komponentės:

$$a_n = g\cos|\beta| = 9{,}3\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right),$$

$$a_t = g\cos\left(90^0 - |\beta|\right) = 3{,}0\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right).$$

Patikrinimui raskime šių pagreičių vektorių sumos modulį:

$$g = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{86{,}5 + 9{,}0} \approx 9{,}8\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right).$$

7) Trajektorijos kreivumo spindulį taške A randame iš įcentrinio pagreičio formulės:

$$a_n = \frac{v_\text{A}^2}{R}; \qquad (7.8)$$

čia v_A yra akmens greitis taške A.

Kadangi $v_\text{A}^2 = v_{\text{A}x}^2 + v_{\text{A}y}^2$, $v_{\text{A}x} = v_0\cos\alpha$, $v_{\text{A}y} = v_0\sin\alpha - gt_2$, gauname tokį trajektorijos kreivumo spindulį taške A :

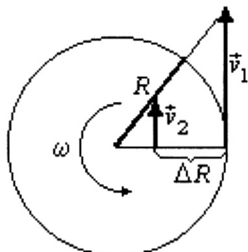
$$R = \frac{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt_2)^2}{a_n} = 35{,}7\ (\text{m}).$$

Rezultatų analizė. Judėjimų nepriklausomumo principas leidžia apskaičiuoti kūno trajektorijos lygtį bei jo judėjimo kinematinius parametrus. Šis principas taikytinas ne tik tais atvejais, kai kūno trajektorija guli vienoje plokštumoje, bet ir sudėtingesniais erdvinių trajektorijų atvejais. Pavyzdžiui, jei nagrinėjamame uždavinyje akmenį veiktų vėjas, statmenas x ir y ašims, kryptimi, akmens atsilenkimą nuo xy plokštumos apskaičiuotume, įvertinę akmens vidutinį greitį vėjo kryptimi ir padauginę jį iš viso skridimo laiko.

8. Besisukančio disko ratlankio taškų linijinis greitis yra 2,5 karto didesnis už taškų, esančių 15 cm arčiau disko centro, linijinį greitį (8 pav.). Raskite disko spindulį *R*.

Žinoma: $\frac{v_1}{v_2} = 3{,}0$; $\Delta R = 0{,}15$ m.

Rasti: *R*.



8 pav.

Sprendimas

Besisukančio kietojo kūno taškų kampiniai greičiai yra vienodi. Linijinio greičio modulis v yra lygus kampinio greičio ω ir sukimosi spindulio R modulių sandaugai ($\vec{\omega}$ statmenas $\vec{R}$), todėl $v_1 = \omega R$, $v_2 = \omega(R - \Delta R)$. Pagal uždavinio sąlygą

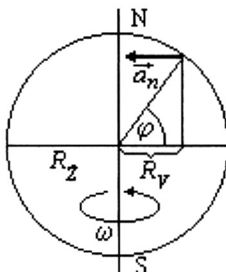
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega R}{\omega(R - \Delta R)} = 3{,}0\,. \qquad (8.1)$$

Išsprendę (8.1), gauname $R = 0{,}22$ m.

9. Raskite Žemės taškų, esančių Vilniaus platumoje ($\varphi = 54{,}7^{\circ}$), įcentrinį pagreitį ir sukimosi linijinį greitį (9 pav.). Žemės spindulys $R_{\check{z}} = 6370$ km.

Žinoma: $\varphi = 54{,}7^{\circ}$; $R_{\check{z}} = 6{,}37 \times 10^6$ m.

Rasti: a_n, v.



9 pav.

Sprendimas

Besisukančio kūno taško įcentrinis pagreitis $a_n = \omega^2 R$ (čia: ω – kūno kampinis greitis, R – taško sukimosi spindulys). Vilniaus platumoje esančių Žemės taškų sukimosi spindulys $R_V = R_{\check{Z}} \cos\varphi$, kampinis greitis $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (čia: $T = 86\,400$ s – Žemės sukimosi apie savo ašį periodas). Taigi įcentrinio pagreičio modulis

$$a_n = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{\check{z}} \cos\varphi = 1{,}95 \times 10^{-2} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right).$$

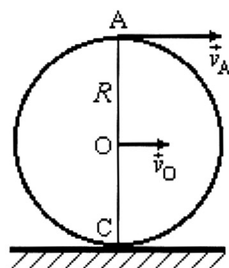
Šis pagreitis yra statmenas Žemės sukimosi ašiai.

Vilniaus platumoje esančių taškų linijinis greitis

$$v = R_v\omega = R_{\check{z}}\omega\cos\varphi = 267{,}7\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

10. Ratas rieda $v_{\text{O}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu (10 pav.). Raskite rato viršutinio taško A linijinį greitį riedėjimo paviršiaus atžvilgiu.

Žinoma: $v_{\text{O}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Rasti*: v_A.



10 pav.

Sprendimas

Rato riedėjimą galima laikyti sukimusi apie akimirksninį sukimosi centrą C (rato ir riedėjimo paviršiaus sąlyčio taško C momentinis greitis lygus nuliui). Visų rato taškų sukimosi kampinis greitis ω yra vienodas.

Rato centro $v_{\text{O}} = \omega R$ (čia: R – taško O atstumas iki akimirkinio sukimosi centro C, lygus rato spinduliui).

Iš čia $\omega = \frac{v_{\text{O}}}{R}$. Taško A atstumas iki akimirkinio sukimosi centro lygus $2R$, o jo linijinis greitis riedėjimo paviršiaus atžvilgiu $v_A = \omega \times 2R = 2v_{\text{O}} = 40\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.

11. Prie sankryžos tarpusavyje statmenomis gatvėmis juda penki automobiliai (11.1 pav.). Jų greičiai gatvės atžvilgiu yra šie: $v_1 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_3 = 8\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_4 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_5 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Raskite automobilių greičius sistemoje, susietoje su pirmuoju automobiliu.

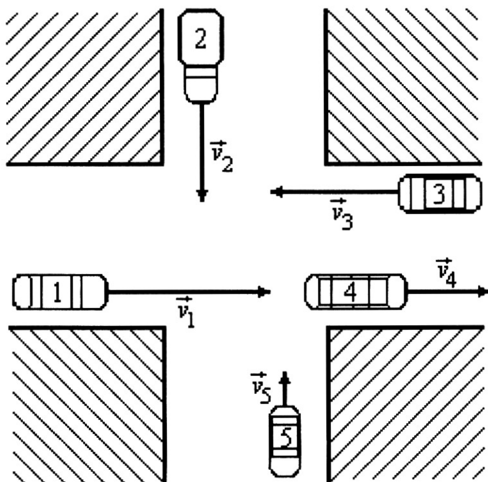
Sprendimas

Kūno greitis nejudančioje atskaitos sistemoje yra lygus jo greičio judančioje atskaitos sistemoje ir judančios atskaitos sistemos greičio nejudančios sistemos atžvilgiu sumai:

$$\vec{v}_{nejud.} = \vec{v}_{jud.} + \vec{V}\,; \qquad (11.1)$$

čia $\vec{V}$ – judančios atskaitos sistemos greitis nejudančioje sistemoje.

Šiuo atveju sąlygoje pateikti automobilių greičiai – tai jų greičiai



11.1 pav.

nejudančios sistemos (gatvės) atžvilgiu, o judančios sistemos (pirmojo automobilio) greitis nejudančios sistemos atžvilgiu lygus $\vec{v}_1$. Todėl galime užrašyti:

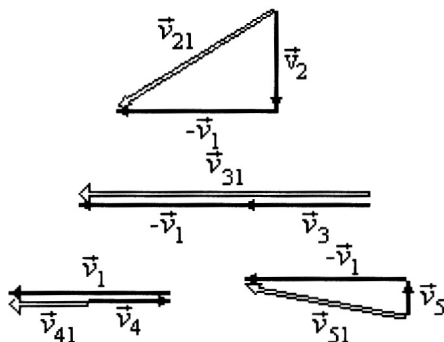
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i1} + \vec{v}_1\,; \qquad (11.2)$$

čia $\vec{v}_i$ – *i*-ojo automobilio greitis gatvės atžvilgiu, $\vec{v}_{i1}$ – *i*-ojo automobilio greitis pirmojo automobilio atžvilgiu, $\vec{v}_1$ – pirmojo automobilio greitis gatvės atžvilgiu.

Iš (11.2) gauname automobilių greičių pirmojo automobilio atžvilgiu lygtį:

$$\vec{v}_{i1} = \vec{v}_i - \vec{v}_1 = \vec{v}_i + (-\vec{v}_1). \qquad (11.3)$$

Greičius $\vec{v}_{i1}$ galima surasti dviem būdais – analitiškai, išreiškiant ieškomus greičius jų projekcijomis, o pastarąsias – sudedamųjų vektorių projekcijomis, ir grafiškai. Antrasis būdas šiuo atveju yra gerokai patogesnis. Jo taikymo rezultatai pateikti 11.2 pav. Iš 11.2 pav. brėžinių gauname greičių modulius:



11.2 pav.

$$v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 11{,}7\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right),$$

$$v_{31} = v_3 - (-v_1) = 18{,}0\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right),$$

$$v_{41} = -v_4 + v_1 = 5{,}0\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right),$$

$$v_{51} = \sqrt{v_1^2 + v_5^2} = 10{,}2\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

12. Nejudančios mikrodalelės miuono gyvavimo trukmė $\tau_0 = 2{,}2 \times 10^{-6}$ s. Kokiu greičiu juda miuonas, jeigu jo gyvavimo

trukmė padidėja iki $\tau = 1{,}1 \times 10^{-5}$ s ? (Šis reiškinys yra nustatytas eksperimentiškai, stebint miuonus prie Žemės paviršiaus.) Laikyti, kad šviesos greitis $c = 2{,}9979 \times 10^{8}\left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.

Žinoma: $\tau_0 = 2{,}2 \times 10^{-6}$ s , $\tau = 1{,}1 \times 10^{-5}$ s . *Rasti*: v.

Sprendimas

Pagal specialiąją reliatyvumo teoriją laiko tarpas tarp dviejų įvykių τ padidėja judančioje sistemoje, lyginant su laiko tarpu τ_0 inercinėje atskaitos sistemoje, kurios atžvilgiu nustatomas judančios sistemos greitis (laiko sulėtėjimo efektas):

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2}}. \qquad (12.1)$$

Iš čia gauname tokį miuono greitį:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\tau_0/\tau\right)^2} = 2{,}9373 \times 10^{8}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

13. Tarkime, hipotetinio kosminio laivo ilgis judėjimo kryptimi atskaitos sistemoje, susietoje su pačiu laivu, lygus $l_0 = 100$ m . Koks būtų laivo ilgis sistemoje, kurios atžvilgiu kosminis laivas juda $v = 0{,}9\,c$ greičiu? (Šiame uždavinyje ir toliau c – šviesos greitis vakuume.)

Žinoma: $l_0 = 100$ m , $v = 0{,}9\,c$. *Rasti*: l.

Sprendimas

Pagal specialiąją reliatyvumo teoriją inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu judančio kūno linijiniai matmenys sumažėja judėjimo kryptimi, t. y.

$$l = l_0\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2}. \qquad (13.1)$$

Įrašę į šią formulę skaitines dydžių reikšmes, gauname:

$$l = 100\sqrt{1 - 0{,}81} = 43{,}59\ (\text{m}).$$

14. Apskaičiuokite $0{,}1c$ greičiu judančio elektrono reliatyvistinę masę. Elektrono rimties masė $m_{0e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}$.

Žinoma: $v = 0{,}1\,c$; $m_{0e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}$. *Rasti*: m_e.

Sprendimas

Pagal specialiąją reliatyvumo teoriją judančio elektrono masė m_e (vadinamoji reliatyvistinė masė) išreiškiama rimties mase m_{0e} ir elektrono greičiu taip:

$$m_e = \frac{m_{0e}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = 9{,}16 \times 10^{-31}\left(\text{kg}\right). \qquad (14.1)$$

Taigi elektrono reliatyvistinė masė yra didesnė už rimties masę.

15. Dvi mikrodalelės lekia viena į kitą greičiais $v_1 = 0{,}7\,c$ ir $v_2 = 0{,}8\,c$. Raskite jų suartėjimo greitį.

Žinoma: $v_1 = 0{,}7\,c$; $v_2 = 0{,}8\,c$. *Rasti*: v.

Sprendimas

Pagal reliatyvistinį greičių sudėties dėsnį suartėjimo greitis išreiškiamas priešpriešiais judančių kūnų greičiais taip:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + {v_1 v_2}/{c^2}}. \qquad (15.1)$$

Iš čia gauname šį mikrodalelių suartėjimo greitį:

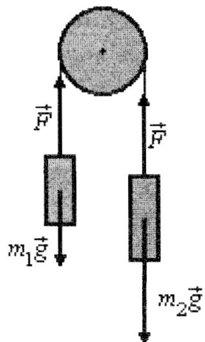
$$v = \frac{1{,}5c}{1 + 0{,}56} = 0{,}96\,c.$$

Rezultatų analizė. Net dviejų priešpriešiais judančių fotonų suartėjimo greitis negali viršyti *c*. Parodykime tai. Tarkime, $v_1 = c$ ir $v_2 = c$. Tada pagal (15.1) lygtį fotonų suartėjimo greitis

$$v = \frac{c + c}{1 + {c \cdot c}/{c^2}} = c.$$

Slenkamojo ir sukamojo judėjimo dinamika

16. Per nejudamą skridinį permestas siūlas, prie kurio galų prikabinti m_1 ir m_2 masių kūnai (16 pav.). Raskite kūnų pagreitį ir siūlo tempimo jėgą. Trinties jėgos ir siūlo masės nepaisykite.
Žinoma: m_1, m_2. *Rasti*: a, F.



16 pav.

Sprendimas

Pirmąjį kūną veikia sunkio jėga $m_1\vec{g}$ ir siūlo tempimo jėga $\vec{F}$. Antrąjį kūną veikia sunkio jėga $m_2\vec{g}$ ir siūlo tempimo jėga $\vec{F}$. Laikykime, kad pirmojo kūno masė yra mažesnė. Tuomet pirmasis kūnas judės aukštyn, o antrasis – žemyn.

Taikydami antrąjį Niutono dėsnį abiems kūnams, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{g} + \vec{F} = m_1\vec{a} \\ m_2\vec{g} + \vec{F} = m_2\vec{a} \end{aligned}\right\}. \tag{16.1}$$

(16.1) lygtį užrašome, projektuodami vektorius į vertikaliąją ašį ir laikydami $\vec{g}$ kryptį teigiamąja:

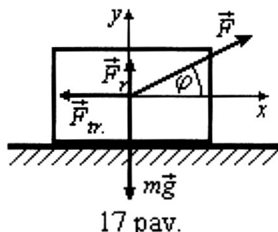
$$\left.\begin{aligned} m_1 g - F = -m_1 a \\ m_2 g - F = m_2 a \end{aligned}\right\}. \tag{16.2}$$

Išsprendę (16.2) a ir F atžvilgiu, gauname:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g, \quad F = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Rezultatų analizė. 1) Jeigu laikysime $m_1 > m_2$, gautose formulėse pagreičio projekcija a keičia ženklą, t. y. kūnų pagreičiai $\vec{a}$ keičia kryptį į priešingą, o jėga F nekinta. 2) Jeigu laikysime $m_2 >> m_1$, iš pagreičio formulės gauname, kad $a \to g$, o iš jėgos formulės $F \to 0$. Fiziškai tai reiškia, kad daug masyvesnis kūnas kris beveik laisvai ir bus beveik nesvarumo būklės (svoris yra lygus siūlo tempimo jėgai).

17. m masės kūnas traukiamas horizontaliąja plokštuma jėga $\vec{F}$, sudarančia su horizontale kampą φ (17 pav.). Trinties koeficientas tarp plokštumos ir kūno pastovus ir lygus μ. Raskite kūno pagreitį.



17 pav.

Žinoma: m, F, φ, μ. *Rasti*: a.

Sprendimas

Kūną veikia sunkio jėga $m\vec{g}$, jėga $\vec{F}$, trinties jėga $\vec{F}_{tr.}$. Pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{tr}. \qquad (17.1)$$

Projektuodami visus (17.1) lygties vektorius į x ir y ašis, gauname dvi skaliarines lygtis:

$$ma = F\cos\varphi - F_{tr}, \qquad (17.2)$$

$$F_r - mg + F\sin\varphi = 0. \qquad (17.3)$$

Trinties jėgos modulis $F_{tr.} = \mu F_r$. Iš (17.3) gauname:

$$F_r = mg - F\sin\varphi. \qquad (17.4)$$

Tada trinties jėga

$$F_{tr.} = \mu(mg - F\sin\varphi). \qquad (17.5)$$

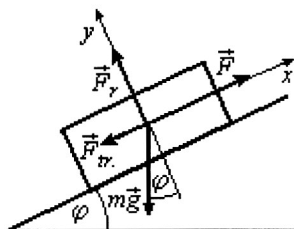
Iš (17.2) ir (17.5) randame horizontaliai (pagal sąlygą) nukreipto pagreičio $\vec{a}$ modulį:

$$a = \frac{F\cos\varphi - \mu(mg - F\sin\varphi)}{m}. \qquad (17.6)$$

Rezultatų analizė. 1) Didėjant jėgai $\vec{F}$, pagreitis $\vec{a}$ didėja ir dėl $\vec{F}$ horizontaliosios komponentės didėjimo, ir dėl trinties jėgos $\vec{F}_{tr.}$ mažėjimo, nes kūno sąveikos su plokštuma jėga sumažėja dydžiu $mg\sin\varphi$. 2) Jei trinties koeficientas μ ir jėga F yra pastovūs, didžiausias pagreitis yra tada, kai funkcijos $(\cos\varphi + \mu\sin\varphi)$ išvestinė $(-\sin\varphi + \mu\cos\varphi) = 0$. Iš čia gauname didžiausio pagreičio sąlygą: $a = a_{\max}$, kai $\varphi = \mathrm{arctg}\,\mu$.

18. Nuožulniąja plokštuma į viršų pagreičiu a traukiamas m masės kūnas. Nuožulnumo kampas φ, trinties koeficientas μ. Raskite traukos jėgą F.

Žinoma: m, a, φ, μ. *Rasti* F.



18 pav.

Sprendimas

Kūną veikia sunkio jėga $m\vec{g}$, traukos jėga $\vec{F}$, trinties jėga $\vec{F}_{tr.}$ ir paviršiaus reakcijos jėga $\vec{F}_r$ (18 pav.). Pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_r . \qquad (18.1)$$

Pasirenkame x ašį lygiagrečiai, o y ašį – statmenai nuožulniajai plokštumai. Projektuodami visus (18.1) lygties vektorius į x ir y ašis (pagreitis $\vec{a}$ nukreiptas išilgai x ašies), gauname dvi skaliarines lygtis:

$$ma = F - F_{tr.} - mg\sin\varphi , \qquad (18.2)$$

$$F_r - mg\cos\varphi = 0 . \qquad (18.3)$$

Trinties jėgos modulis $F_{tr} = \mu F_r$. Iš (18.3) gauname:

$$F_r = mg\cos\varphi . \qquad (18.4)$$

Tada trinties jėga

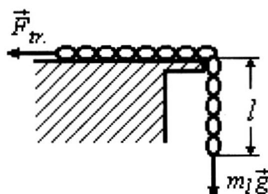
$$F_{tr} = \mu mg\cos\varphi . \qquad (18.5)$$

Iš (18.2) ir (18.5) randame ieškomos jėgos modulį:

$$F = m\left[a + g\left(\sin\varphi + \mu\cos\varphi\right)\right]. \qquad (18.6)$$

Rezultatų analizė. 1) Jėgos modulis tiesiog proporcingas kūno masei ir suteikiamam pagreičiui. 2) Jėgos modulis didėja, didėjant trinties koeficientui μ. 3) Jeigu kampas $\varphi = 0$ (kūnas traukiamas horizontaliąja plokštuma), jėga $F = m(a + \mu g)$ (tą patį rezultatą gauname, jeigu 17 uždavinio (17.6) lygtyje laikysime $\varphi = 0$). 4) Jei kampas $\varphi = 90^{\circ}$ (kūnas keliamas vertikaliai), jėga $F = m(a + g)$ nepriklauso nuo trinties koeficiento, nes trinties jėga $F_{tr.} = 0$.

19. L ilgio vienalytė grandinė guli ant stalo krašto taip, kad jos dalis yra pakibusi ore. Trinties koeficientas tarp stalo paviršiaus ir grandinės μ. Raskite, kokia maksimali grandinės dalis gali kaboti, kad grandinė nejudėtų.



19 pav.

Žinoma: L, μ. *Rasti*: $\dfrac{l}{L}$.

Sprendimas

Grandinė yra pusiausvira, jeigu ant stalo gulinčios jos dalies trinties jėgos modulis $F_{tr.}$ yra lygus pakibusios grandinės dalies sunkio jėgos mg moduliui (šių jėgų vektoriai nukreipti skirtingai, tačiau jėgos veikia išilgai grandinės dėl grandžių sąveikos) (19 pav.). Pažymėkime vienalytės grandinės ilgio vieneto masę m_0, o didžiausią (kol grandinė nejuda) pakibusios dalies ilgį l. Tada pakibusią dalį veikia sunkio jėga

$$m_l g = m_0 l g . \qquad (19.1)$$

Gulinčios dalies sunkio jėga (šiuo atveju lygi paviršiaus reakcijos jėgai)

$$F_r = m_0 (L - l) g . \qquad (19.2)$$

Trinties jėga

$$F_{tr.} = \mu F_r = \mu m_0 (L - l) g . \qquad (19.3)$$

Palyginę (19.1) ir (19.3) lygčių dešiniąsias puses, gauname:

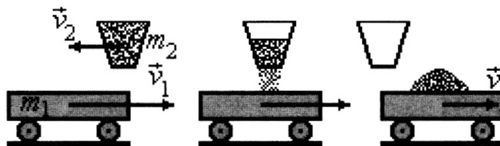
$$l = \mu (L - l). \qquad (19.4)$$

Iš (19.4) lygties išreiškiame ieškomą santykį:

$$\frac{l}{L} = \frac{\mu}{1 + \mu} . \qquad (19.5)$$

Rezultatų analizė. Iš (19.5) lygties matome, kad, pavyzdžiui, kintant trinties koeficientui μ nuo 0 (trinties nėra) iki 1, santykis $\dfrac{l}{L}$ kinta nuo 0 (visa grandinė turi gulėti ant stalo) iki 0,5 (kabo pusė visos grandinės ilgio).

20. Į judančią greičiu v_1 masės m_1 platformą iš konteinerio, judančio priešinga kryptimi greičiu v_2, vertikaliai išpilama m_2 masės anglis (20 pav.). Raskite platformos su anglimi greitį v.



20 pav.

Žinoma: m_1, v_1, m_2, v_2. *Rasti* v.

Sprendimas

Pagal impulso tvermės dėsnį

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_a = (m_1 + m_2)\vec{v}; \tag{20.1}$$

čia $m_1\vec{v}_1$ – platformos impulsas iki sąveikos, $m_2\vec{v}_a$ – anglies impulsas iki sąveikos ($\vec{v}_a = \vec{v}_2 + \vec{g}t$ – anglies greitis žemės atžvilgiu).

Kadangi mus domina judėjimas tik horizontaliąja kryptimi, projektuojame (20.1) lygties vektorius į horizontalę. Šiuo atveju $v_a = v_2$, todėl gauname:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v; \tag{20.2}$$

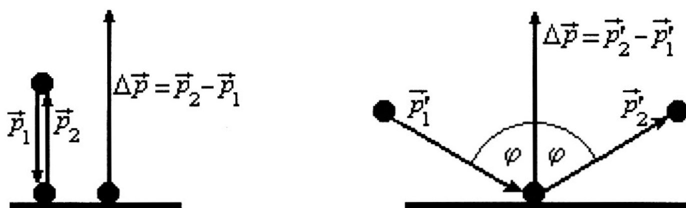
čia m_1v_1 ir $(-m_2v_2)$ – platformos ir anglies impulsų projekcijos iki sąveikos, $(m_1 + m_2)v$ – platformos ir anglies impulso projekcija po sąveikos.

Iš (20.2) gauname:

$$v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{20.3}$$

Rezultatų analizė. Jeigu $m_1v_1 > m_2v_2$, $v > 0$, t. y. platforma su anglimi judės į dešinę. Jeigu $m_1v_1 < m_2v_2$, $v < 0$, t. y. platforma su anglimi judės į kairę. Jeigu $m_1v_1 = m_2v_2$, $v = 0$, t. y. platforma su anglimi sustos.

21. Judanti $300\frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu molekulė statmenai atsitrenkė į indo sienelę ir tampriai atšoko nuo jos. Kokiu greičiu turi judėti ši molekulė, kad, atsitrenkusi į sienelę 60° kampu, perduotų sienelei tokį pat impulsą, kaip ir pirmojo smūgio metu?



21 pav.

Žinoma: $v = 300\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\Delta p = \text{const}$. *Rasti* v'.

Sprendimas

Molekulės impulsas $\vec{p} = m\vec{v}$. Sienelei perduotas impulsas lygus molekulės impulso pokyčiui su priešingu ženklu, todėl ieškome molekulės impulso pokyčių modulių. Molekulės impulso pokytis (21 pav.) pirmuoju atveju $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, antruoju atveju $\Delta\vec{p} = \vec{p}'_2 - \vec{p}'_1$. Šių pokyčių modulius gauname, suprojektavę impulsų vektorius į sienelei statmeną ašį. Pirmuoju atveju

$$\Delta p = p_2 - (-p_1) = p - (-p) = 2p \text{ (čia: } p = p_1 = p_2\text{)}.$$

Antruoju atveju

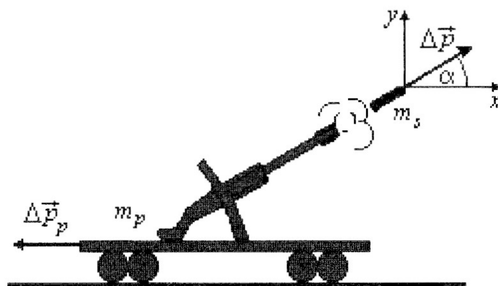
$$\Delta p = p'_2 \cos\varphi - (-p'_1 \cos\varphi) = 2p' \cos\varphi. \qquad (21.1)$$

Pagal sąlygą $2p = 2p'\cos\varphi$, t. y. $2v = 2v'\cos\varphi$ (molekulės masė yra ta pati). Todėl gauname:

$$v' = \frac{v}{\cos\varphi} = \frac{300}{0,5} = 600\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

Rezultatų analizė. Iš (21.1) lygties matome, kad sienelei perduotas molekulės impulsas yra tuo didesnis, kuo mažesnis yra kritimo kampas.

22. Geležinkelio platformoje, kurios pradinis greitis lygus 0, įtvirtintas pabūklas. Platformos su pabūklu masė m_p. Iš pabūklo šaunama α kampu į horizontą išilgai bėgių (22 pav.). Sviedinio masė m_s, šūvio metu jo greitis vamzdžio atžvilgiu v_s. Raskite platformos greitį po pirmojo ir antrojo šūvio.



22 pav.

Žinoma: $v_0 = 0$, m_p, m_s, v_s, α. *Rasti*: v_1, v_2.

Sprendimas

Pagal impulso tvermės dėsnį platformos ir sviedinio impulsų pokyčių suma lygi nuliui:

$$\Delta\vec{p}_p + \Delta\vec{p}_s = 0.$$

Kadangi $v_0 = 0$, po pirmojo šūvio

$$(m_p - m_s)\vec{v}_1 + m_s\vec{v}_s = 0. \qquad (22.1)$$

Projektuodami (22.1) į x ašį (y ašies kryptimi platforma nejuda), gauname:

$$(m_p - m_s)v_1 + m_s v_s \cos\alpha = 0. \qquad (22.1a)$$

Iš (22.1 a) lygties randame platformos su pabūklu greitį po pirmojo šūvio:

$$v_1 = -\frac{m_s v_s \cos\alpha}{m_p - m_s}. \qquad (22.2)$$

Iš (22.2) matome, kad platforma, kurios masė sumažėja per vieno sviedinio masę, pradeda judėti į kairę (greičio projekcija neigiamoji).

Platformos greitį po antrojo šūvio galima rasti dviem būdais.

1) Nejudančią atskaitos sistemą susiejame su bėgiais.

Prieš antrąjį šūvį platforma juda į kairę greičiu v_1. Vėl taikome impulso tvermės dėsnį:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_s ; \tag{22.3}$$

čia $\vec{p}_1$ – platformos greitis prieš antrąjį šūvį, $\vec{p}_2$ – platformos greitis po antrojo šūvio, $\vec{p}_s$ – antrojo sviedinio impulsas.

Įrašę impulsų reikšmes ir suprojektavę į x ašį, gauname:

$$-(m_p - m_s)v_1 = (m_p - 2m_s)v_2 + m_s(v_s \cos\alpha + v_1) ; \tag{22.4}$$

čia $(m_p - 2m_s)$ – platformos masė po antrojo šūvio, $(v_s \cos\alpha + v_1)$ – sviedinio greitis bėgių atžvilgiu.

Įrašę į (22.4) v_1 reikšmę iš (22.2) ir pertvarkę, gauname:

$$v_2 = -\frac{m_s(2m_p - 3m_s)v_s \cos\alpha}{(m_p - m_s)(m_p - 2m_s)} . \tag{22.5}$$

2) Atskaitos sistemą susiejame su pačia platforma, judančia į kairę po pirmojo šūvio.

Taikome impulso tvermės dėsnį antrajam šūviui:

$$(m_p - 2m_s)\vec{v}_2' + m_s\vec{v}_s = 0 ; \tag{22.6}$$

čia $(m_p - 2m_s)$ – platformos masė po antrojo šūvio; $\vec{v}_2'$ – platformos greitis po antrojo šūvio sistemoje, susietoje su platforma, judančia į kairę po pirmojo šūvio, t. y. platformos greičio prieaugis; $\vec{v}_s$ – sviedinio greitis platformos atžvilgiu (jis lieka tas pats po bet kurio šūvio).

Projekcijoje į x ašį gauname:

$$(m_p - 2m_s)v_2' + m_s v_s \cos\alpha = 0 ,$$

iš čia

$$v_2' = -\frac{m_s v_s \cos\alpha}{m_p - 2m_s} . \tag{22.7}$$

Platformos greitį bėgių atžvilgiu po antrojo šūvio gauname, panaudoję klasikinį greičių sudėties dėsnį:

$$v_2 = v_1 + v_2' = -\left(\frac{m_s v_s \cos\alpha}{m_p - m_s} + \frac{m_s v_s \cos\alpha}{m_p - 2m_s}\right) =$$
$$-\frac{m_s(2m_p - 3m_s)v_s \cos\alpha}{(m_p - m_s)(m_p - 2m_s)}. \qquad (22.8)$$

Rezultatų analizė. 1) Platformos greičio pokytis didėja nuo 0 iki maksimalios reikšmės kampui α mažėjant nuo 90° iki 0°. 2) Jeigu $180^{\circ} > \alpha > 90^{\circ}$, $\cos\alpha < 0$, todėl gaunama neigiamoji platformos greičio projekcija (formulėse (22.2) ir (22.5) minuso ženklas keičiasi į pliusą, t. y. platforma judės į dešinę). 3) Jeigu $\alpha = 90^{\circ}$, platformos greitis nekinta (impulsas perduodamas vertikaliai žemyn ir šūvio metu padidėja platformos slėgio į bėgius jėga). 4) Formulės (22.2) ir (22.5) yra visiškai tikslios, tačiau praktiškai naudotini jų apytiksliai variantai. Jeigu sviedinio masę laikytume daug mažesne už platformos masę ($m_s << m_p$), formules (22.2) ir (22.5) galima užrašyti taip:

$$v_1 = -\frac{m_s v_s \cos\alpha}{m_p}, \qquad (22.9)$$

$$v_2 = -\frac{2m_s v_s \cos\alpha}{m_p}. \qquad (22.10)$$

Tikslesniame artinyje formulė (22.5) bus tokia:

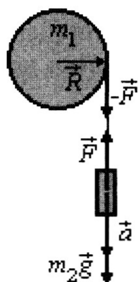
$$v_2 = -\frac{2m_s v_s \cos\alpha}{(m_p - 2m_s)}. \qquad (22.11)$$

Formulių (22.2) ir (22.11) lyginimas leidžia indukcijos metodu gauti platformos greičio po N šūvių išraišką, jeigu $Nm_s << m_p$:

$$v_N = -\frac{Nm_s v_s \cos\alpha}{(m_p - Nm_s)}. \qquad (22.12)$$

23. Ant m_1 masės ritinio, kuris gali suktis apie horizontaliąją simetrijos ašį, užvyniotas siūlas, prie kurio galo prikabinta masė m_2 (23 pav.). Raskite masės m_2 pagreitį a ir siūlo įtempimo jėgą F. Siūlo masės ir trinties jėgos nepaisykite.

Žinoma : m_1, m_2. *Rasti*: a, F.



23 pav.

Sprendimas

Akivaizdu, kad pagreitis $\vec{a}$ nukreiptas vertikaliai žemyn, o jėga $\vec{F}$ – išilgai siūlo. Šių vektorių moduliams rasti užrašome pagrindinį sukamojo judėjimo dinamikos lygtį ritiniui ir antrąjį Niutono dėsnį masei m_2:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}, \tag{23.1}$$

$$\vec{F} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}; \tag{23.2}$$

čia: $\vec{\varepsilon}$ – ritinio kampinis pagreitis, $\vec{M}$ – ritinį veikiantis jėgos momentas, I – ritinio inercijos momentas.

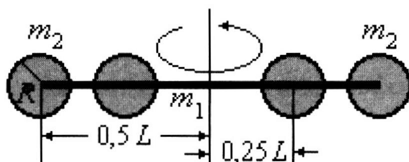
Kadangi kampas tarp jėgos $\vec{F}$ ir išvesto į jėgos veikimo tašką ritinio spindulio $\vec{R}$ šiuo atveju lygus 90°, jėgos momento modulis yra $M = FR$. Kampinio pagreičio modulis – $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$. Pilnavidurio ritinio inercijos momentas – $I = 0{,}5\, m_1 R^2$. Įrašę šias dydžių reikšmes į (23.1) ir suprojektavę (23.2) lygties vektorius į vertikaliąją ašį, gauname dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais (a ir F) sistemą:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{R} &= \frac{FR}{0{,}5\, m_1 R^2} \\ m_2 g - F &= m_2 a \end{aligned}\right\}. \tag{23.3}$$

Išsprendę (23.3), gauname:

$$a = \frac{m_2}{0{,}5m_1 + m_2} g, \quad F = \frac{0{,}5m_1 m_2}{0{,}5m_1 + m_2} g.$$

24. Ant horizontaliojo strypo, kurio masė $m_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ ir ilgis $L = 0{,}4\,\mathrm{m}$, užmauti du rutuliai taip, kad jų masių centrai sutampa su strypo galais. Kiekvieno rutulio masė $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, spindulys $R = 0{,}05$ m. Sistema yra sukama apie vertikaliąją simetrijos ašį (24 pav.). Kiek kartų pasikeis sistemos sukimosi kampinis pagreitis ε, jei sistemą veikiantis jėgos momentas liks toks pats, o rutuliai bus perstumti taip, kad jų masių centrų atstumai iki sukimosi ašies sumažės iki $0{,}25\,L$?



24 pav.

Žinoma: $m_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, $L = 0{,}4\,\mathrm{m}$, $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $R = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $d_1 = 0{,}5\,L$, $d_2 = 0{,}25\,L$, $\vec{M} = \mathrm{const}$. *Rasti* $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Sprendimas

Jei $\vec{M} = \mathrm{const}$, pagal pagrindinį sukamojo judėjimo dinamikos dėsnį kampinių pagreičių santykis

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{I_1}{I_2}; \tag{24.1}$$

čia I_1 ir I_2 – sistemos inercijos momentai sukimosi ašies atžvilgiu pirmojoje padėtyje (kai rutuliai yra strypo galuose) ir antrojoje padėtyje (kai rutuliai yra arčiau sukimosi ašies).

Sistemos inercijos momentas susideda iš strypo inercijos momento $I_s = \frac{1}{12} m_1 L^2$ ir rutulių inercijos momentų I_r, apskaičiuojamų pagal Šteinerio teoremą. Sistemos inercijos momentas

$$I = I_s + 2I_r. \tag{24.2}$$

Rutulio inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu

$$I_{r0} = 0{,}4 m_2 R^2. \qquad (24.3)$$

Taigi pirmojoje padėtyje dviejų rutulių inercijos momentas

$$2I_r = 2\left[0{,}4 m_2 R^2 + m_2 (0{,}5L)^2\right], \qquad (24.4)$$

o antrojoje padėtyje

$$2I_r = 2\left[0{,}4 m_2 R^2 + m_2 (0{,}25L)^2\right]; \qquad (24.5)$$

čia $0{,}5L$ ir $0{,}25L$ – rutulių masės centrų atstumai iki sukimosi ašies pirmojoje ir antrojoje padėtyse.

Iš (24.2), (24.4) ir (24.5) gauname:

$$I_1 = \tfrac{1}{12} m_1 L^2 + 2\left[0{,}4 m_2 R^2 + m_2 (0{,}5L)^2\right], \qquad (24.6)$$

$$I_2 = \tfrac{1}{12} m_1 L^2 + 2\left[0{,}4 m_2 R^2 + m_2 (0{,}25L)^2\right]. \qquad (24.7)$$

Įrašome į (24.1) lygtį (24.6) ir (24.7) išraiškas bei dydžių reikšmes ir apskaičiavę gauname:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\tfrac{1}{12} m_1 L^2 + 2\left[0{,}4 m_2 R^2 + m_2 (0{,}5L)^2\right]}{\tfrac{1}{12} m_1 L^2 + 2\left[0{,}4 m_2 R^2 + m_2 (0{,}25L)^2\right]} = 3{,}09.$$

Rezultatų analizė. 1) Antroje padėtyje sistemos masė yra pasiskirsčiusi arčiau sukimosi ašies, todėl sistemos inercijos momentas sumažėja, o kampinis pagreitis padidėja. 2) Tarkime, kad nėra žinomas strypo (arba kitos atramos) inercijos momentas I_x, bet galima eksperimentiškai nustatyti kampinių pagreičių santykį N. Tada

$$\frac{I_x + 2\left(I_{0r} + m_2 d_1^2\right)}{I_x + 2\left(I_{0r} + m_2 d_2^2\right)} = N; \qquad (24.8)$$

čia I_{0r} – rutulio inercijos momentas jo simetrijos ašies atžvilgiu, d_1 ir d_2 – rutulių masių centrų atstumai iki sukimosi ašies pirmojoje ir antrojoje padėtyje.

Iš (24.8) gauname nežinomą atramos inercijos momentą:

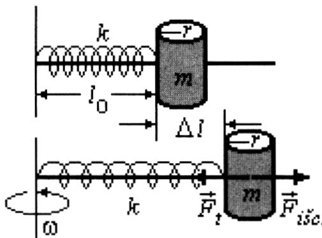
$$I_x = \frac{2\left[I_0(1-N) + m_2\left(d_1^2 - N d_2^2\right)\right]}{N-1}. \qquad (24.9)$$

25. Pilnaviduris vertikalusis ritinys, kurio masė m ir spindulys r, gali slankioti išilgai horizontaliojo strypo. Ritinys sujungtas su strypo galu spyruokle, kurios tamprumo koeficientas k. Nedeformuotos spyruoklės ilgis l_0. Sistema pradedama sukti kampiniu greičiu ω apie vertikaliąją ašį, einančią per strypo galą (25 pav.). Raskite sukamo ritinio inercijos momentą. Trinties jėgos nepaisykite.

Žinoma: m, r, k, l_0, ω.

Rasti I.

Sprendimas



25 pav.

Ritinio inercijos momentas

$$I = I_0 + m(l + r)^2; \qquad (25.1)$$

čia $I_0 = 0{,}5\,mr^2$ – pilnavidurio ritinio inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu, $(l + r)$ – atstumas nuo ritinio simetrijos ašies iki sukimosi ašies (čia: $l = l_0 + \Delta l$).

Suraskime dydį Δl. Kampiniu greičiu ω besisukantį ritinį veikia įcentrinė jėga, kurios modulis

$$F_{įc.} = m\omega^2(l + r); \qquad (25.2)$$

čia m – ritinio masė, ω – jo sukimosi kampinis greitis.

Ši jėga yra spyruoklės tamprumo jėga $F_{t.} = k\Delta l$, t. y.

$$k\,\Delta l = m\omega^2(l + r). \qquad (25.3)$$

Įrašome į (25.3) $l = l_0 + \Delta l$ ir iš gautos lygties randame Δl:

$$\Delta l = \frac{m\omega^2(l_0 + r)}{k - m\omega^2}. \qquad (25.4)$$

Į (25.1) lygtį įrašome $I_0 = 0{,}5mr^2$ ir $l = l_0 + \Delta l$, panaudoję (25.4):

$$I = m\left[0{,}5r^2 + \frac{k^2(l_0 + r)^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2}\right]. \qquad (25.5)$$

26. Kūnas laisvai krinta iš aukščio H. Kokiame aukštyje jo kinetinė energija yra n kartų didesnė už potencinę?

Žinoma: H, $E_{kh} = nE_{ph}$. *Rasti*: h.

Sprendimas

Pagal mechaninės energijos tvermės dėsnį laisvai krintančio kūno pilnutinė mechaninė energija nekinta ir bet kuriuo laiko momentu lygi potencinei energijai didžiausiame aukštyje H:

$$E_k + E_p = mgH. \tag{26.1}$$

Pagal sąlygą $E_{kh} = nE_{ph}$, todėl

$$nE_{ph} + E_{ph} = mgH; \tag{26.2}$$

čia $E_{ph} = mgh$ – kūno potencinė energija aukštyje h.

Įrašome į (26.2) E_{ph} reikšmę ir iš gautos lygties randame h:

$$h = \frac{H}{n+1}. \tag{26.3}$$

Rezultatų analizė. Kai $n \to 0$, $h \to H$ (kritimo pradžia). Kai $n \to \infty$, $h \to 0$ (kritimo pabaiga).

27. Atšokdamas nuo grindų, kamuoliukas kaskart praranda n-ąją mechaninės energijos dalį. Kokią pradinės mechaninės energijos E_0 dalį turės kamuoliukas po N šuolių?

Žinoma: $\Delta E_i = -\frac{E_i}{n}$, N. *Rasti*: $\frac{E_n}{E_0}$.

Sprendimas

Bet kuriam šuoliui galioja lygtis

$$E_{i+1} = E_i - \Delta E_i = E_i - \frac{E_i}{n} = E_i \frac{n-1}{n}; \tag{27.1}$$

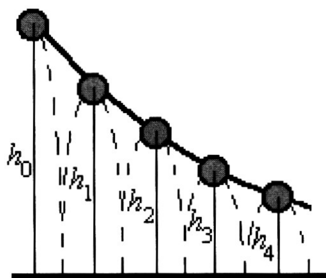
čia E_i – i-ojo, o E_{i+1} – $(i+1)$-ojo kamuoliuko šuolių mechaninė energija.

Po N kamuoliuko šuolių likusi mechaninė energija

$$E_N = E_0 \left(\frac{n-1}{n}\right)^N. \tag{27.2}$$

Iš (24.2) gauname:

$$\frac{E_N}{E_0} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N . \qquad (27.3)$$



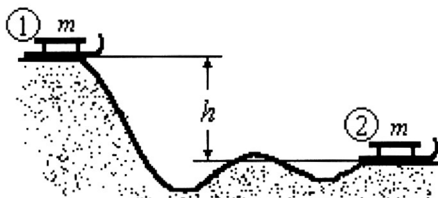
27 pav.

Rezultatų analizė. Kamuoliuko mechaninė energija yra lygi jo potencinei energijai aukščiausiame šuolio trajektorijos taške, todėl šuolių didžiausieji aukščiai (27 pav.) kinta pagal šį dėsnį:

$$h = h_0 \left(\frac{n-1}{n}\right)^N .$$

Jeigu $n >> 1$, šuolių aukščių mažėjimą galima aproksimuoti tokia eksponente: $h = h_0 e^{-\left(N/n\right)}$.

28. Rogės, kurių masė m, nuvažiavo nuo kalno ir sustojo. Pradinės ① ir galinės ② padėties aukščių skirtumas lygus h. Kokį darbą reikia atlikti, kad užtrauktume rogutes atgal į pradinę padėtį?



28 pav.

Žinoma: m, h.

Rasti: A.

Sprendimas

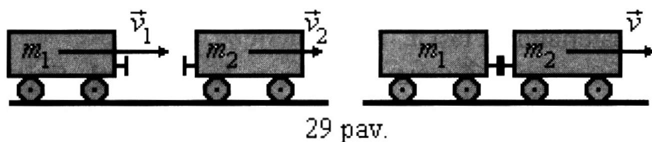
Rogių potencinių energijų skirtumas ① ir ② padėtyse visiškai pereina į trinties jėgos darbą, nes kinetinė energija tose padėtyse lygi 0:

$$A_{tr} = E_{p1} - E_{p2} = mgh . \qquad (28.1)$$

Kad užtrauktume roges atgal į pradinę padėtį, reikia suteikti joms potencinę energiją $E_p = mgh$ ir atlikti darbą prieš trinties jėgą, t. y.:

$$A = E_p + A_{tr} = mgh + mgh = 2mgh . \qquad (28.2)$$

29. Du vagonai, kurių masės m_1 ir m_2, juda ta pačia kryptimi greičiais v_1 ir v_2 ($v_1 > v_2$) ir po sukibimo juda kartu (29 pav.). Kiek kinetinės energijos virsta šiluma dūžio metu?



29 pav.

Žinoma: m_1, m_2, v_1, v_2. *Rasti*: Q.

Sprendimas

Netampraus dūžio metu dviejų vagonėlių suminė kinetinė energija E_{k1} virsta šiluma Q ir dviejų kartu judančių vagonėlių kinetine energija E_{k2}:

$$E_{k1} = Q + E_{k2}. \tag{29.1}$$

Vagonėlių suminė kinetinė energija prieš smūgį:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{29.2}$$

Vagonėlių kinetinė energija po smūgio:

$$E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}. \tag{29.3}$$

Greitį v randame, pasinaudoję impulso tvermės dėsniu:

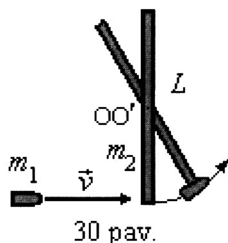
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v. \tag{29.4}$$

Iš (29.4) randame v ir įrašome į (29.3), o gautą reiškinį bei (29.2) lygtį įrašome į (29.1) ir supaprastinę gauname Q:

$$Q = E_{k1} - E_{k2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{29.5}$$

Rezultatų analizė. 1) Jeigu $m_1 \to 0$ arba $m_2 \to 0$, $Q \to 0$. 2) Jei $m_2 >> m_1$ ir $v_2 = 0$, $Q = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, t. y. smūgio į masyvią sieną metu visa judančiojo kūno kinetinė energija virsta šiluma.

30. Kulka, kurios masė m_1 ir greitis v, statmenai pataiko į vertikaliojo strypo galą ir įstringa jame. Strypas gali suktis apie horizontaliąją ašį OO', einančią per jo masės centrą (30 pav.). Strypo ilgis L, masė m_2. Raskite strypo su kulka sukimosi kinetinę energiją. Kulką laikykite materialiuoju tašku.



30 pav.

Žinoma: m_1, m_2, v, L. *Rasti*: E_k.

Sprendimas

Strypo su kulka sukimosi kinetinė energija

$$E_k = \frac{(I_k + I_s)\omega^2}{2}; \qquad (30.1)$$

čia $I_k = m_1\left(L/2\right)^2$ ir $I_s = 1/12\, m_2 L^2$ yra kulkos ir strypo inercijos momentai ašies OO' atžvilgiu, ω – jų sukimosi kampinis greitis.

Pagal impulso momento tvermės dėsnį

$$m_1 v L/2 = (I_k + I_s)\omega; \qquad (30.2)$$

čia $m_1 v L/2$ – kulkos impulso momentas ašies OO' atžvilgiu prieš dūžį, $(I_k + I_s)\omega$ – kulkos ir strypo impulso momentas po dūžio.

Iš (30.2) randame ω:

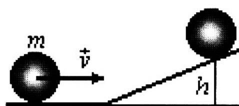
$$\omega = \frac{m_1 v L}{2(I_k + I_s)}. \qquad (30.3)$$

Įrašę (30.3) į (30.1) ir atsižvelgę į I_k ir I_s išraiškas, gauname:

$$E_k = \frac{m_1^2 v^2}{2m_1 + 2/3\, m_2}. \qquad (30.4)$$

Rezultatų analizė. 1) E_k didėja, didėjant kulkos masei m_1 ir greičiui v. 2) Jei strypo masė $m_2 \to 0, E_k \to \frac{m_1 v^2}{2}$. Jei strypo masė $m_2 \to \infty$, $E_k \to 0$.

31. m masės rutulys pradeda riedėti greičiu v nuožulnia plokštuma į viršų ir sustoja, pasiekęs aukštį h (31 pav.). Raskite trinties jėgos darbą.



31 pav.

Žinoma: v, m, h. *Rasti*: A_{tr}.

Sprendimas

Riedančio rutulio kinetinė energija virsta jo potencine energija ir šiluma, lygia trinties jėgos darbui:

$$E_k = E_p + A_{tr}. \tag{31.1}$$

Riedančio rutulio kinetinė energija susideda iš masės centro slenkamojo judėjimo kinetinės energijos ir rutulio sukimosi apie masės centrą kinetinės energijos:

$$E_k = E_{slenk.} + E_{suk.} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}; \tag{31.2}$$

čia $I = 0{,}4mR^2$ – rutulio inercijos momentas atžvilgiu ašies, einančios per jo masės centrą (R – rutulio spindulys), $\omega = \frac{v}{R}$ – rutulio sukimosi kampinis greitis.

Įrašę rutulio inercijos momento ir jo sukimosi kampinio greičio reikšmes į (31.2) lygtį, gauname:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{0{,}4mv^2}{2} = 0{,}7mv^2. \tag{31.3}$$

Potencinė rutulio energija aukštyje h:

$$E_p = mgh. \tag{31.4}$$

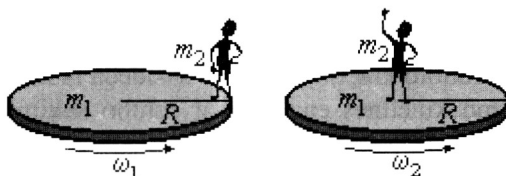
Įrašę (31.3) ir (31.4) į (31.1) ir išreiškę A_{tr}, gauname:

$$A_{tr} = m\left(0{,}7v^2 - gh\right). \tag{31.5}$$

Rezultatų analizė. Kadangi praktiškai visada $A_{tr} > 0$, iš (31.5) gauname, kad rutulio pakilimo aukštis

$$h < \frac{0{,}7v^2}{g}. \tag{31.6}$$

32. Ant besisukančios apie vertikaliąją simetrijos ašį platformos krašto stovi žmogus. Platformos masė m_1, jos spindulys R, žmogaus masė m_2. Platforma sukasi kampiniu greičiu ω_1. Raskite platformos su žmogumi kinetinės energijos pokytį ΔE_k, jei žmogus pereis į platformos centrą (32 pav.). Platformą laikykite disku, žmogų – materialiuoju tašku.



29 pav.

Žinoma: m_1, m_2, R, ω_1. *Rasti*: ΔE_k.

Sprendimas

Kai žmogus stovi ant platformos krašto, platformos su žmogumi kinetinė energija

$$E_{k1} = \frac{(I_1 + I_2)\omega_1^2}{2}; \qquad (32.1)$$

čia $I_1 = 0{,}5\, m_1 R^2$ ir $I_2 = m_2 R^2$ – platformos (disko) ir žmogaus (materialiojo taško) inercijos momentai platformos sukimosi ašies atžvilgiu, ω_1 – platformos su žmogumi sukimosi kampinis greitis, kai žmogus stovi ant platformos krašto.

Platformos su žmogumi centre kinetinė energija

$$E_{k2} = \frac{I_1 \omega_2^2}{2}; \qquad (32.2)$$

čia ω_2 – platformos su žmogumi sukimosi kampinis greitis, kai žmogus perėjo į platformos centrą; šiuo atveju žmogaus inercijos momentas lygus 0, todėl visos sistemos inercijos momentas yra I_1.

Kinetinių energijų skirtumas

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{I_1\omega_2^2 - (I_1 + I_2)\omega_1^2}{2}. \qquad (32.3)$$

Laikykime sistemą „platforma + žmogus“ uždarąja. Tada jai taikytinas impulso momento tvermės dėsnis:

$$(I_1 + I_2)\omega_1 = I_1\omega_2; \qquad (32.4)$$

čia $(I_1 + I_2)$ – sistemos inercijos momentas, kai žmogus stovi ant platformos krašto.

Įrašę į (32.4) inercijos momentų reikšmes, išreiškiame kampinį greitį ω_2:

$$\omega_2 = \frac{I_1 + I_2}{I_1}\omega_1 = \frac{0{,}5m_1 + m_2}{0{,}5m_1}\omega_1 = \left(1 + 2\frac{m_2}{m_1}\right)\omega_1. \qquad (32.5)$$

Įrašę į (32.3) inercijos momentų reikšmes ir ω_2 iš (32.5), gauname:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\left[0{,}5m_1R^2\left(1 + 2\frac{m_2}{m_1}\right)^2\omega_1^2 - \left(0{,}5m_1R^2 + m_2R^2\right)\omega_1^2\right] = \qquad (32.6)$$

$$\frac{m_2R^2\omega_1^2}{2}\left(1 + 2\frac{m_2}{m_1}\right).$$

Rezultatų analizė. 1) Platformos kinetinės energijos pokytis ΔE_k yra tiesiog proporcingas žmogaus kinetinės energijos pokyčiui $(\Delta E_k)_{žm.} = \frac{m_2R^2\omega_1^2}{2}$. Pokytis ΔE_k didėja didėjant santykiui $\frac{m_2}{m_1}$. Jei $\frac{m_2}{m_1} \to 0$, $\Delta E_k \to (\Delta E_k)_{žm.}$. 2) Sistemos kinetinė energija padidėja todėl, kad einantis į platformos centrą žmogus atlieką darbą prieš išcentrinę jėgą, veikiančią neinercinėje sistemoje – besisukančioje platformoje. Šis darbas

$$A = \Delta E_k = \frac{m_2R^2\omega_1^2}{2}\left(1 + 2\frac{m_2}{m_1}\right) = (\Delta E_k)_{žm.}\left(1 + 2\frac{m_2}{m_1}\right). \qquad (32.7)$$

Mechaniniai svyravimai ir bangos

33. 10 g masės materialusis taškas harmoningai svyruoja pagal dėsnį $x(t)=10^{-3}\sin 314t$ (m). Raskite kelią $l(\Delta t)$, kurį nueina svyruojantis taškas per $\Delta t = 5\,\text{s}$. Raskite laiko momentu $t_1 = 3\times 10^{-3}\,\text{s}$ šiuos dydžius: taško nuokrypį nuo pusiausvyros padėties; tašką veikiančią jėgą; taško kinetinę ir potencinę energijas.

Žinoma: $m = 10^{-2}\,\text{kg}$, $x = 10^{-3}\sin 314t$ (m), $\Delta t = 5\,\text{s}$, $t_1 = 3\times 10^{-3}\,\text{s}$.

Rasti: $l(\Delta t)$, $x(t_1)$, $p(t_1)$, $F(t_1)$, $E_k(t_1)$, $E_p(t_1)$.

Sprendimas

1) Per vieną svyravimų periodą T taškas nueina kelią $l(T) = 4x_0$ (čia x_0 yra svyravimų amplitudė), o per laiką Δt nueina kelią $l = \frac{4x_0\Delta t}{T}$. Taško svyravimų periodas $T = \frac{2\pi}{\omega}$, todėl $l = \frac{2x_0\Delta t\omega}{\pi}$. Įrašę į šią formulę amplitudę $x_0 = 10^{-3}\,\text{m}$, laiką $\Delta t = 5\,\text{s}$ ir ciklinį dažnį $\omega = 314\ \text{s}^{-1}$, gauname $l = 1\,\text{m}$.

2) Taško nuokrypį nuo pusiausvyros padėties randame, įrašę į taško judėjimo lygtį t_1 reikšmę:

$$x(3\times 10^{-3}) = 10^{-3}\sin 0{,}942 = 8{,}087\times 10^{-4}(\text{m}). \qquad (33.1)$$

3) Tašką veikiančią jėgą randame pagal antrąjį Niutono dėsnį:

$$F(t_1) = ma(t_1);$$

čia $a(t_1) = \frac{d^2x(t_1)}{dt^2} = -10^{-3}\times 314^2\sin 314t_1$ – taško pagreitis.

Įrašę dydžių skaitines reikšmes, gauname:

$$F(t_1) = -10^{-2}\times 10^{-3}\times 314^2\sin 314t_1 = -0{,}797(\text{N}). \qquad (33.2)$$

Gautoje formulėje minuso ženklas reiškia, kad jėga yra nukreipta taško atsilenkimui priešinga kryptimi (prisiminkime, kad būtent tokia yra viena iš harmoninių svyravimų egzistavimo sąlygų).

4) Kinetinė taško energija laiko momentu $t_1 = 3 \times 10^{-3}$s:

$$E_k(t_1) = \frac{mv^2(t_1)}{2}; \tag{33.3}$$

čia $v(t_1) = \frac{dx}{dt} = 0{,}314\cos 314\,t_1$ – taško greitis.

Įrašę į (3.3) skaitines dydžių reikšmes, gauname:

$E_k(t_1) = 1{,}708 \times 10^{-4}$ J.

5) Potencinė taško energija laiko momentu $t_1 = 3 \times 10^{-3}$s:

$$E_p(t_1) = \frac{k\,x^2(t_1)}{2} = \frac{m\omega^2 x^2(t_1)}{2}; \tag{33.4}$$

čia $k = m\omega^2$ – grąžinančios (tampriosios arba kvazitampriosios) jėgos koeficientas.

Įrašę skaitines dydžių reikšmes, gauname:

$$E_p(t_1) = \frac{kx^2(t_1)}{2} = \frac{m\omega^2 x^2(t_1)}{2} = 3{,}224 \times 10^{-4}(\mathrm{J}).$$

Taško pilnutinę mechaninę energiją gautume sudėję kinetinę ir potencinę energiją:

$$E(t_1) = E_k(t_1) + E_p(t_1) = 4{,}932 \times 10^{-4}(\mathrm{J}).$$

Rezultatų analizė. Pagal mechaninės energijos tvermės dėsnį bet kuriuo laiko momentu pilnutinė mechaninė taško energija turi būti tokia pati. Vadinasi, ji lygi taško didžiausiajai kinetinei energijai (kai $\cos 314\,t = 1$, $v = v_{max}$) arba taško didžiausiajai potencinei energijai (kai $\sin 314\,t = 1$, $x = x_{max}$):

$$E_{p\,max} = \frac{kx_{max}^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2} = 4{,}932 \times 10^{-4}(\mathrm{J}),$$

$$E_{k\,max} = \frac{mv_{max}^2}{2} = 4{,}932 \times 10^{-4}(\mathrm{J}).$$

Įsitikinome, kad gautos energijų skaitinės reikšmės patvirtina mechaninės energijos tvermės dėsnį.

34. Žinoma slopinamųjų svyravimų dinamikos lygtis, kurioje visi dydžiai pateikti SI sistemos vienetais: $2{,}03\frac{d^2x}{dt^2}+1{,}62\frac{dx}{dt}+20x=0$. Raskite slopinimo koeficientą β, svyravimų periodą T ir logaritminį slopinimo dekrementą λ. Užrašykite šių svyravimų kinematinę lygtį, jei pradinė amplitudė $x_0=1{,}2$ ir pradinė fazė $\varphi_0=0$.

Sprendimas

Bendroji slopinamųjų svyravimų dinamikos lygties forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

Nagrinėjamu atveju $m=2{,}03\,\mathrm{kg}$, $r=1{,}62\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, $k=20\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$.

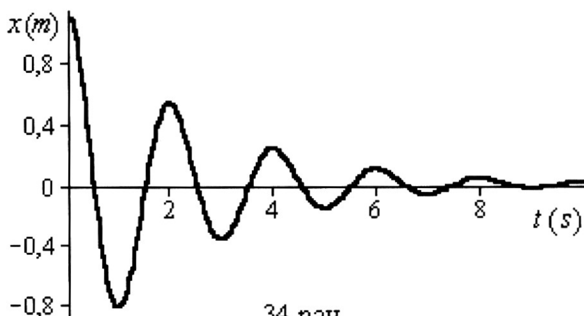
Slopinimo koeficientas $\beta=\frac{r}{2m}=\frac{1{,}62}{2\times 2{,}03}=0{,}4\left(\mathrm{s}^{-1}\right)$.

Svyravimų periodas $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=6{,}28\sqrt{\frac{2{,}03}{20}}=2(\mathrm{s})$.

Logaritminis slopinimo dekrementas $\lambda=\beta T=0{,}4\times 2=0{,}8$.

Bendroji slopinamųjų svyravimų kinematinės lygties forma:

$$x=x_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)=1{,}2\mathrm{e}^{-0{,}4t}\cos 3{,}14\,t\,(\mathrm{m}).$$



34 pav.

Įrašę skaitines lygties dydžių reikšmes, gauname kinematikos lygtį $x=1{,}2\mathrm{e}^{-0{,}4t}\cos 3{,}14\,t\,(\mathrm{m})$. Jos grafikas pateiktas 34 pav.

35. Slopinamieji svyravimai vyksta taip, kad trečiojo svyravimo amplitudė yra 11,02 karto didesnė už šeštojo svyravimo amplitudę. Svyravimų linijinis dažnis $\nu = 0{,}5\,\text{Hz}$. Raskite slopinimo koeficientą β ir laiką t_n, per kurį svyravimų amplitudė sumažėja e^n kartų (e – natūrinių logaritmų pagrindas).

Žinoma: $\dfrac{x_3}{x_6} = 11{,}02$, $\nu = 0{,}5\,\text{Hz}$. *Rasti*: β, t_1.

Sprendimas

Slopinimo koeficientą β galima išreikšti taip:

$$\beta = \frac{\lambda}{T}; \tag{35.1}$$

čia $\lambda = \dfrac{1}{N}\ln\dfrac{x_i}{x_{i+N}}$ – logaritminis slopinimo dekrementas (x_i – i-ojo svyravimo amplitudė, x_{i+N} – $(i+N)$-ojo svyravimo amplitudė), $T = \dfrac{1}{\nu}$ – svyravimų periodas.

Šiuo atveju

$$\beta = \frac{\nu}{N}\ln\frac{x_i}{x_{i+N}} = \frac{0{,}5}{3}\ln 11{,}02 = 0{,}4\left(\text{s}^{-1}\right). \tag{35.2}$$

Slopinamųjų svyravimų amplitudė kinta pagal dėsnį

$$x = x_0 \mathrm{e}^{-\beta t}. \tag{35.3}$$

Pagal sąlygą $\dfrac{x}{x_0} = \mathrm{e}^{-n}$, t. y. $\beta t_n = n$. Iš čia

$$t_n = \frac{n}{\beta} = \frac{nT}{\lambda}. \tag{35.4}$$

Rezultatų analizė. Jeigu (35.4) lygtyje $n = 1$, tai $\beta = \dfrac{1}{t_n}$, t. y. slopinimo koeficientas β yra dydis, atvirkščias laikui, per kurį slopinamųjų svyravimų amplitudė sumažėja e kartų.

36. Žinoma harmoningos priverstinės jėgos veikiamos svyruoklės lygtis: $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+144x=\cos\Omega t$. Visi dydžiai pateikti SI sistemoje. Svyruoklės masė 10^{-2} kg. Raskite svyruoklės priverstinių svyravimų rezonansinį dažnį $\Omega_{rez.}$, svyravimų amplitudę $x_{0\,\max}$ ir didžiausią greitį $v_{\max}$ esant rezonansui, aplinkos pasipriešinimo koeficientą r, fazių skirtumą φ tarp svyruoklės poslinkio bei priverstinės jėgos.

Sprendimas

Bendroji priverstinių svyravimų lygties forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\Omega t\,; \qquad (36.1)$$

čia m – svyruoklės masė, β – svyravimų slopinimo koeficientas, ω_0 – laisvųjų negęstamųjų svyravimų ciklinis dažnis, F_0 – priverstinės jėgos amplitudė, Ω – priverstinės jėgos veikimo ciklinis dažnis.

Palyginę sąlygoje pateiktą lygtį su (36.1) lygtimi, matome, kad $\beta=2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_0=12\ s^{-1}$, $\frac{F_0}{m}=1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Svyruoklės priverstinių svyravimų rezonansinis dažnis:

$$\Omega_{rez.}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{144-8}=11{,}66\left(\mathrm{s}^{-1}\right). \qquad (36.2)$$

Svyruoklės svyravimų amplitudė

$$x_0=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (36.3)$$

Svyruoklės svyravimų amplitudė esant rezonansui ($\Omega=\omega_0$):

$$x_{0\max}=\frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=2{,}11\times10^{-2}(\mathrm{m}). \qquad (36.4)$$

Svyruoklės greitis

$$v = -x_0\Omega\sin(\Omega t + \varphi) = \frac{-F_0\Omega\sin(\Omega t + \varphi)}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (36.5)$$

Svyruoklės greitis esant rezonansui ($\Omega = \omega_0$):

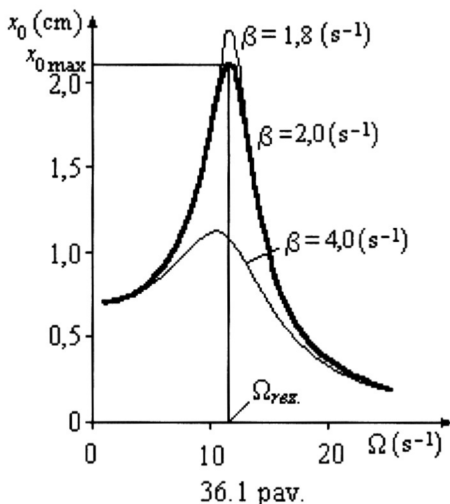
$$v_{max} = \frac{F_0}{2m\beta} = 0{,}25\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right). \quad (36.6)$$

Aplinkos pasipriešinimo koeficientas

$$r = 2m\beta = 2\times10^{-2}\times2 = 4\times10^{-2}\left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right). \quad (36.7)$$

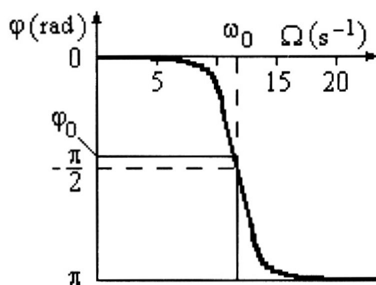
Fazių postūmis tarp svyruoklės poslinkio bei jį veikiančios priverstinės jėgos:

$$\varphi = \text{arctg}\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = -1{,}4(\text{rad}). \quad (36.8)$$



36.1 pav.

Rezultatų analizė. Vykstant priverstiniams svyravimams, svyruoklė svyruoja priverstinės jėgos dažniu Ω. Jeigu Ω kinta, svyravimų amplitudė pasiekia maksimumą, kai $\Omega = \Omega_{rez.}$, o tada vėl mažėja (mechaninis rezonansas). Amplitudės dydis rezonanso metu priklauso nuo slopinimo koeficiento. 36.1 pav. pateikta rezonansinė kreivė nagrinėjamam atvejui (riebioji kreivė) ir rezonansinės kreivės, kai slopinimo koeficientas β yra didesnis ($4\,\text{s}^{-1}$) ir mažesnis ($1{,}8\,\text{s}^{-1}$) už pateiktą sąlygoje.



36.2 pav.

Matome, kad rezonansinės kreivės aštrumas didėja, mažėjant slopinimo koeficientui.

36.2 paveiksle pavaizduota fazių postūmio φ tarp svyruoklės poslinkio bei jį veikiančios priverstinės jėgos priklausomybė nuo priverstinės jėgos dažnio Ω ir pažymėtas uždavinio sąlygoje pateiktas ciklinis dažnis ω_0 bei apskaičiuotasis φ_0.

37. Trijų matematinių svyruoklių svyravimų periodai yra T_1, T_2 ir T_3. Šių svyruoklių siūlai sujungiami į vieną be ilgio nuostolių ir gaunama ketvirtoji matematinė svyruoklė. Raskite jos svyravimų periodą T.

Žinoma: T_1, T_2, T_3. *Rasti*: T.

Sprendimas

Matematinės svyruoklės svyravimų periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,; \qquad (37.1)$$

čia l – svyruoklės ilgis, g – laisvojo kritimo pagreitis.

Todėl ieškomas svyruoklės svyravimų periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2 + l_3}{g}}\,; \qquad (37.2)$$

čia l_1, l_2, l_3 – svyruoklių ilgiai.

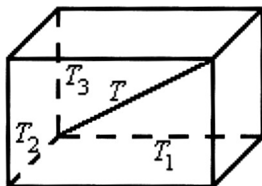
Iš (37.1) gauname:

$$l_1 = \frac{gT_1^2}{4\pi^2},\ l_2 = \frac{gT_2^2}{4\pi^2},\ l_3 = \frac{gT_3^2}{4\pi^2}.$$

Įrašę šias ilgių reikšmes į (37.2), gauname:

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}\,. \qquad (37.3)$$

Rezultatų analizė. 1) Gauta lygybė paprastai vaizduojama geometriškai. Jeigu T_1, T_2 ir T_3 dydžius laikytume stačiakampio gretasienio kraštinėmis, tai T dydis yra lygus gretasienio įstrižainei (37 pav.).



36.3 pav.

2) Jeigu būtų surištos tik dvi svyruoklės, gautume $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$. Indukcijos būdu n svyruoklėms gauname: $T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}$.

38. R spindulio rutuliukas iš eilės kabinamas ant netąsių, nesvarių siūlų. Pirmuoju atveju siūlo ilgis $l_1 = R$, antruoju – $l_2 = 20\,R$. Raskite taip gaunamų svyruoklių svyravimų periodus, abiem atvejais iš pradžių laikydami svyruokles matematinėmis, o paskui – fizikinėmis.
Žinoma: R, $l_1 = R$, $l_2 = 20R$. *Rasti*: $T_{mat.1}$, $T_{fiz.1}$, $T_{mat.2}$, $T_{fiz.2}$.

Sprendimas

Matematinės svyruoklės svyravimų periodas

$$T_{mat.} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,; \qquad (38.1)$$

čia l – matematinės svyruoklės siūlo ilgis.

Fizikinės svyruoklės svyravimų periodas

$$T_{fiz.} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}}\,; \qquad (38.2)$$

čia I_0 – svyruoklės inercijos momentas masės centro O atžvilgiu, m – svyruoklės masė, d – atstumas tarp svyruoklės svyravimų ašies ir masės centro.

Pirmuoju atveju matematinės svyruoklės svyravimų periodas

$$T_{mat.1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \qquad (38.3)$$

Pirmuoju atveju fizikinės svyruoklės, kurios $I_0 = 0{,}4\,mR^2$ ir $d = 2R$, svyravimų periodas

$$T_{fiz.1} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4mR^2 + m(2R)^2}{2mgR}} = 2\pi\sqrt{2{,}2\frac{R}{g}}. \qquad (38.4)$$

Antruoju atveju matematinės svyruoklės svyravimų periodas

$$T_{mat.2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{20R}{g}}. \qquad (38.5)$$

Antruoju atveju fizikinės svyruoklės, kurios $I_0 = 0{,}4\,mR^2$ ir $d = 21\,R$, svyravimų periodas

$$T_{fiz.2} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4mR^2 + m(21R)^2}{21mgR}} = 2\pi\sqrt{21{,}02\frac{R}{g}}. \qquad (38.6)$$

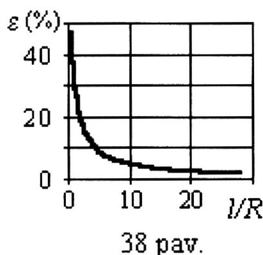
Rezultatų analizė. Pirmuoju atveju svyruoklė labai netiksliai atitinka matematinės svyruoklės modelį, nes rutuliuko matmuo yra didelis, palyginti su siūlo ilgiu. Tikslų svyravimų periodą gauname, laikydami šią svyruoklę fizikine. Laikydami ją matematine, gauname rezultato santykinę paklaidą

$$\varepsilon_1 = \frac{T_{fiz.1} - T_{mat.1}}{T_{fiz.1}} = \frac{\sqrt{2{,}2} - \sqrt{1}}{\sqrt{2{,}2}} = 32{,}6\ \%.$$

Ši paklaida sumažės, jei laikysime matematinės svyruoklės ilgiu siūlo ilgio ir rutuliuko spindulio sumą ($d = 2R$), t. y. vietoj rutuliuko imsime materialųjį tašką, esantį rutuliuko masės centre. Tuomet matematinės svyruoklės svyravimų periodas $T'_{mat.1} = 2\pi\sqrt{\frac{l'_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$, o santykinė paklaida $\varepsilon'_1 = \frac{T_{fiz.1} - T'_{mat.1}}{T_{fiz.1}} = \frac{\sqrt{2{,}2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2{,}2}} = 4{,}6\ \%$.

Antruoju atveju iš (38.5) ir (38.6) matome, kad rezultatai beveik vienodi (svyruoklė labai gerai atitinka matematinės svyruoklės modelį). Šiuo atveju santykinė paklaida

$$\varepsilon_2 = \frac{T_{fiz.2} - T_{mat.2}}{T_{fiz.2}} = 2{,}46\ \%\ .$$



38 pav.

Santykinės paklaidos ε priklausomybė nuo santykio $\frac{l}{R}$ pateikta 38 pav. Akivaizdu, kad, didėjant siūlo ilgio ir rutuliuko spindulio santykiui, santykinė paklaida artėja prie nulio.

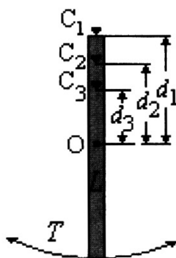
39. Apskaičiuokite L ilgio plono strypo, svyruojančio apie ašį C, neinančią per masės centrą O (t. y. fizikinės svyruoklės), svyravimų periodus, kai atstumas tarp sukimosi ašies ir masės centro $d_1 = 0{,}5L$; $d_2 = 0{,}4L$; $d_3 = 0{,}25L$ (39.1 pav.).

Žinoma: L, $d_1 = 0{,}5L$, $d_2 = 0{,}4L$, $d_3 = 0{,}25L$. *Rasti:* T_1, T_2, T_3.

Sprendimas

Fizikinės svyruoklės svyravimų periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}}\ ; \qquad (39.1)$$



39.1 pav.

čia I_0 – svyruoklės inercijos momentas masės centro O atžvilgiu, m – svyruoklės masė, d – atstumas tarp svyruoklės sukimosi ašies ir masės centro.

Plono strypo $I_0 = \frac{1}{12}mL^2$. Įrašę I_0 ir d reikšmes į (39.1), gauname:

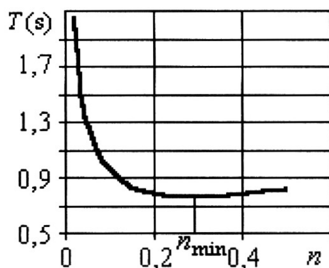
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2 + m(0{,}5L)^2}{0{,}5mgL}} \approx 2\pi\sqrt{0{,}67\frac{L}{g}}\ ,$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2 + m(0{,}4L)^2}{0{,}4mgL}} \approx 2\pi\sqrt{0{,}61\frac{L}{g}},$$

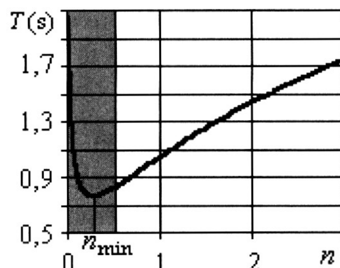
$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2 + m(0{,}25L)^2}{0{,}25mgL}} \approx 2\pi\sqrt{0{,}58\frac{L}{g}}.$$

Rezultatų analizė. Išnagrinėkime, kaip plono strypo svyravimų periodas priklauso nuo atstumo tarp svyravimų ašies ir masės centro. Šiam tikslui užrašykime plono strypo svyravimų periodo formulę, laikydami, kad atstumas d išreiškiamas strypo ilgio dalimis, t. y. $d = nL$. Dydis $n \le 0{,}5\ L$, jei svyravimų ašis eina per strypą, ir $n > 0{,}5\ L$, jei svyravimų ašis yra strypo linijoje už jo ribų (pavyzdžiui, strypas yra už galo pakabintas ant plono siūlo). Bendruoju atveju

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2 + m(nL)^2}{mgnL}} = 2\pi\sqrt{\frac{1+12n^2}{12n}\cdot\frac{L}{g}}.$$



39.2 pav.



39.3 pav.

Kad būtų patogiau skaičiuoti, laikykime, kad $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1$ s (tokiu atveju strypo ilgis $L = 0{,}249$ m). Tada $T(n) = \sqrt{\frac{1+12n^2}{12n}}$.

39.2 pav. pateiktas šios funkcijos grafikas, kai $0 < n < 0,5$ (svyravimų ašis neišeina už strypo ribų).

39.3 pav. *pateiktame* grafike $0 < n < 3$ (svyravimų ašis gali eiti ir per strypą, ir už jo ribų, 39.2 grafiko vaizduojama n sritis šiame grafike turi pilką foną). Abiejuose grafikuose matome funkcijos $T(n)$ minimumą. Jį atitinkančią $n_{\min}$ reikšmę gauname, prilyginę funkcijos išvestinę nuliui ir išsprendę gautąją lygtį:

$$\frac{d}{dn}\sqrt{\frac{1+12n^2}{12n}} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12n}{1+12n^2}} \cdot \frac{\left(1+12n^2\right)\times 12 - 12n\times 24n}{\left(1+12n^2\right)^2} = 0.$$

Gautos lygties trupmenos skaitiklis turi būti lygus 0:

$$\left(1+12n^2\right)\times 12 - 12n\times 24n = 12\left(1-12n^2\right) = 0.$$

iš čia $n_{\min} = 0,289$.

Kai $n \to 0, T \to \infty$, t. y. strypas nesvyruoja, o sukasi apie masės centrą.

Pavyzdžiui, jei $n = 0,001$, $L = 0,25$ m ilgio strypo svyravimų periodas –

$$T(0,001) = \sqrt{\frac{1+12\times(0,001)^2}{12\times 0,001}} = 9,13\ (\text{s}).$$

Kai $n \to \infty, T \to 2\pi\sqrt{\frac{nL}{g}}$, t. y. pakabinę strypą ant labai ilgo ($nL >> L$) siūlo, gautume nL ilgio matematinę svyruoklę.

Pavyzdžiui, jei $n = 100$, $L = 0,25$ m ilgio strypo svyravimų periodas –

$$T(100) = \sqrt{\frac{1+12\times(100)^2}{12\times 100}} = 10,00\ (\text{s}).$$

40. Tampriojoje aplinkoje, kurios tankis $\rho = 1{,}3\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, x ašies kryptimi sklinda be slopinimo plokščioji harmoninė banga, kurios lygtis $y = 10^{-7}\sin\left[3{,}14\times10^3\left(t - \dfrac{x}{340}\right)\right]$. Visi dydžiai pateikti SI sistemos vienetais. Raskite bangos ilgį λ; periodą T; aplinkos dalelių, esančių $1\ \text{m}$ atstumu nuo bangos šaltinio, svyravimų lygtį; bangos intensyvumą I.

Žinoma: $y(x,t)$, $\rho = 1{,}3\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $x = 1\ \text{m}$. *Rasti:* λ, T, $y(t)$, I.

Sprendimas

Bendroji plokščiosios harmoninės bangos lygties forma:

$$y = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]. \qquad (40.1)$$

Iš sąlygoje pateiktos lygties ir (40.1) palyginimo gauname:

$$A = 10^{-7}\ \text{m},\ \omega = 3{,}14\times10^3\ \text{s}^{-1}\left(s^{-1}\right),\ v = 340\frac{\text{m}}{\text{s}},\ \varphi_0 = 0.$$

Bangos ilgis $\lambda = \dfrac{2\pi v}{\omega} = \dfrac{2\times3{,}14\times340}{3{,}14\times10^3} = 0{,}68\ (\text{m})$.

Bangos periodas $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\times10^{-3}\ (\text{s})$.

$1\ \text{m}$ atstumu nuo šaltinio aplinkos dalelių svyravimų lygtis:

$$y = 10^{-7}\sin\left[3{,}14\times10^3\left(t - 2{,}9\times10^{-3}\right)\right]\ (\text{m}). \qquad (40.2)$$

Bangos intensyvumas

$$I = 0{,}5\,\rho v\omega^2 A^2 = 2{,}18\times10^{-5}\left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right). \qquad (40.3)$$

Rezultatų analizė. Jei čia būtų garso banga, jos intensyvumas atitiktų didelio automobilių srauto sukeliamo triukšmo lygį:

$$L = 10\ \lg\frac{I}{10^{-12}} = 73{,}4(\text{dB}). \qquad (40.4)$$

41. Ilgos horizontaliosios stygos galas yra virpinamas dažniu $\nu = 40$ Hz ir amplitude $A = 10^{-2}$ m. Stygos linijinis tankis (ilgio vieneto masė) $\tau = 0{,}1\frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Styga įtempta 150 N jėga. Raskite susidarančios skersinės bangos greitį bei ilgį λ. Užrašykite bangos lygtį, jei laiko momentu $t_1 = 10^{-2}$ s stygos taškas, esantis atstumu $x_1 = 0{,}15$ m nuo stygos virpinamo galo, yra pasislinkęs dydžiu $y_1 = 3\times10^{-3}$ m.

Žinoma: $\nu = 40$ Hz, $A = 10^{-2}$ m, $\tau = 0{,}1\frac{\text{kg}}{\text{m}}$, $F = 150$ N.

Rasti: u, λ, $y = f(x,t)$.

Sprendimas

Skersinės bangos stygoje sklidimo greitis

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}; \qquad (41.1)$$

čia F – stygos tempimo jėga, S – stygos skerspjūvio plotas, ρ – stygos medžiagos tankis.

Laikydami stygą ritiniu, galime užrašyti

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l\,S}; \qquad (41.2)$$

čia l – stygos ilgis.

Įrašę (41.2) į (41.1), gauname:

$$u = \sqrt{\frac{Fl}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\tau}} = 38{,}7\,(\text{m/s}). \qquad (41.3)$$

Bangos ilgis

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 0{,}97\,(\text{m}). \qquad (41.4)$$

Bangos lygtis

$$y = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]. \qquad (41.5)$$

(41.5) lygtyje yra žinomi bangos amplitudė $A = 10^{-2}$ m, ciklinis dažnis $\omega = 2\pi\nu = 251(\text{Hz})$ ir greitis $u = 38{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Žinodami, kad laiko momentu $t_1 = 5\times10^{-3}$ s atstumu $x_1 = 0{,}15$ m nuo stygos virpinamo galo esantis stygos taškas yra pasislinkęs dydžiu $y_1 = 8\times10^{-3}$ m, šiam taškui užrašome lygtį:

$$y_1 = A\sin\left[\omega\left(t_1 - \frac{x_1}{\text{v}}\right) + \varphi_0\right]. \tag{41.6}$$

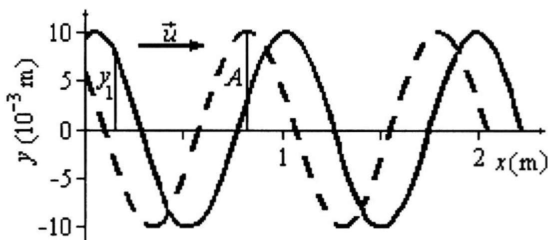
Iš čia:

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{y_1}{A} - \omega\left(t_1 - \frac{x_1}{\text{v}}\right) = 0{,}65(\text{rad}). \tag{41.7}$$

Įrašę skaitines bangos parametrų reikšmes, gauname tokią bangos lygtį:

$$y = 10^{-2}\sin\left[251\left(t - \frac{x}{38{,}7}\right) + 0{,}65\right](\text{m}). \tag{41.8}$$

Rezultatų analizė. Mechaninė banga yra mechaninių virpesių tamprioje terpėje sklidimo procesas, todėl statinis paveikslas atspindi tik akimirkines virpančių terpės dalelių padėtis.



41 pav.

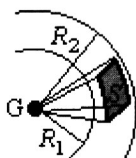
41 pav. pavaizduota bangos padėtis laiko momentais $t' = nT$ (punktyrinė sinusoidė) ir $t'' = nT + t_1$ (ištisinė sinusoidė).

42. Žmogaus ausis gali skirti garso šaltinių garsumą, jei jų garsumo intensyvumo lygių skirtumas $\Delta L = 1$ dB . Kiek kartų mažiausiai turi pasikeisti atstumas iki taškinio garso šaltinio, kad žmogus pajustų garsumo kitimą? Aplinką laikykite vienalyte ir izotropine, garso bangos slopinimo nepaisykite.

Žinoma: $\Delta L = 1$ dB. *Rasti*: $\dfrac{R_2}{R_1}$.

Sprendimas

Taškinis šaltinis G vienalytėje izotropinėje aplinkoje skleidžia sferinę bangą (42.1 pav.). Tolstant nuo šaltinio, energija, kurią perneša banga per ploto vienetą per laiko vienetą (t. y. bangos intensyvumas), kinta atvirkščiai proporcingai sferos plotui, t. y. sferos spindulio atstumo iki garso šaltinio kvadratui:



42.1 pav.

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 . \qquad (42.1)$$

Garso intensyvumo lygiai susieti su bangos intensyvumais taip:

$$L_1 = 10 \text{ lg}\frac{I_1}{I_{\text{min.}}}, \; L_2 = 10 \text{ lg}\frac{I_2}{I_{\text{min.}}}; \qquad (42.2)$$

čia $I_{\text{min.}}$ – girdimumo slenkstis (mažiausias žmogaus girdimo garso intensyvumas, lygus $10^{-12} \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2}$).

Iš (42.1) ir (42.2) gauname:

$$\Delta L = L_1 - L_2 = 10\left(\text{lg}\frac{I_1}{I_{\text{min.}}} - \text{lg}\frac{I_2}{I_{\text{min.}}}\right) =$$

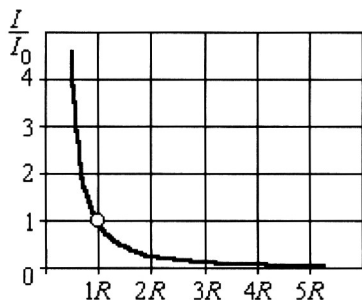
$$10 \text{ lg}\frac{I_1}{I_2} = 10 \text{ lg}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 20\text{lg}\frac{R_2}{R_1}. \qquad (42.3)$$

Iš (42.3) lygties suradę $\frac{R_2}{R_1}$ ir įrašę skaitines dydžių reikšmes, gauname:

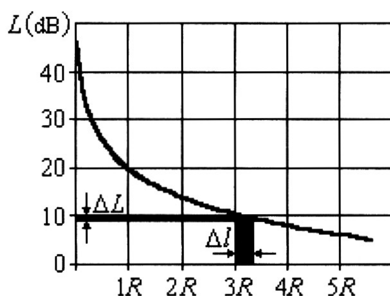
$$\frac{R_2}{R_1} = 10^{\frac{\Delta L}{20}} = 1{,}12. \qquad (42.4)$$

Vadinasi, kad žmogus pajustų garsumo kitimą, atstumas iki taškinio garso šaltinio turi pasikeisti ne mažiau 1,12 karto.

Rezultatų analizė. 1) Garso intensyvumo priklausomybę nuo atstumo iki taškinio garso šaltinio nusako (42.1) formulė. Šios priklausomybės grafikas pateiktas 42.2 pav. Jame vienetinį atstumą R atitinka garso bangos intensyvumas I_0 (t. y. $\frac{I}{I_0} = 1$).



42.2 pav.



42.3 pav.

42.3 pav. pateikta garso intensyvumo lygio priklausomybė nuo atstumo iki taškinio garso šaltinio. Akivaizdu, kad, tolstant nuo šaltinio, garso intensyvumo lygis asimptotiškai artėja prie nulio. Šiame grafike pavaizduotas mažiausias garsumo pokytis ($\Delta L = 1$ dB), kurį jaučia žmogaus ausis, ir jį atitinkantis atstumo iki garso šaltinio pokytis Δl. Pastarasis sudaro 12 % pradinio atstumo. Pavyzdžiui, jei pradinis atstumas R, tai $\Delta l = 0{,}12\ R$; jei pradinis atstumas $3R$, tai $\Delta l = 0{,}36R$ (grafike pavaizduotas atvejis).

43. Į $4\ \text{cm}^3$ tūrio vakuuminę elektroninę lempą per mikroplyšį iš atmosferos kas sekundę prasiskverbia 10^8 oro molekulių. Per kiek !aiko lempa prisipildys iki atmosferos slėgio? Laikykite, kad proceso pradžioje oro molekulių lempoje nėra. Sąlygos yra normaliosios ($T = 273{,}15$ K; $p = 1{,}0132\times10^5$ Pa).

Žinoma: $V = 4\times10^{-6}\ \text{m}^3$, $N_t = 10^8\ \dfrac{\text{molekulių}}{\text{s}}$, $T \cong 273$ K, $p \cong 10^5$ Pa. *Rasti*: t.

Sprendimas

Žinome, kad molekulių skaičius viename dujų molyje (Avogadro skaičius) $N_0 = 6{,}02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. Esant normalioms sąlygoms, vieno dujų molio tūris $V_0 = 2{,}24\times10^{-2}\ \text{m}^3$. Iš proporcijos $\dfrac{N_0}{N} = \dfrac{V_0}{V}$ gauname, kad, lempai prisipildžius iki normalių atmosferos sąlygų, joje esančių molekulių skaičius

$$N = \frac{N_0}{V_0}V. \tag{43.1}$$

Laikas, per kurį lempa prisipildys iki atmosferos slėgio

$$t = \frac{N}{N_t} = \frac{N_0 V}{N_t V_0} = 1{,}075\times10^{12}\ (\text{s}) = 34\ 088\,(\text{metai}). \tag{43.2}$$

Rezultatų analizė. Matome, kad, esant normalioms sąlygoms, molekulių skaičius netgi mažame tūryje yra milžiniškas. Realiai vakuuminėje lempoje slėgis $p \cong 10^{-5}$ Pa . Tada $4\ \text{cm}^3$ tūrio vakuuminėje lempoje yra apie $1{,}1\times10^{10}$ oro molekulių.

Kelių šimtų kilometrų aukštyje virš Žemes paviršiaus, kur yra daugumos pilotuojamų erdvėlaivių orbitos, molekulių koncentracija lygi apie $10^{10}\ \text{m}^{-3}$. Būtent šie atmosferos likučiai stabdo erdvėlaivius ir, laikui bėgant, mažina erdvėlaivių orbitų vidutinį aukštį.

44. Azoto temperatūra $t = 27\ ^{\circ}\mathrm{C}$, slėgis $p = 10^5\ \mathrm{Pa}$. Raskite azoto tankį ρ, molekulių koncentraciją n ir vienos azoto N_2 molekulės masę m_0. Laikykite azotą idealiosiomis dujomis.

Žinoma: $\mu_{N_2} = 2{,}8 \times 10^{-2}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$, $T = 300\ \mathrm{K}$, $p = 10^5\ Pa$.

Rasti: ρ, n, m_0.

Sprendimas

1) Taikome azotui idealiųjų dujų būvio (Klapeirono) lygtį:

$$pV = \frac{m}{\mu_{N_2}} RT; \qquad (44.1)$$

čia p – dujų slėgis, V – dujų tūris, m – dujų masė, μ_{N_2} – dujų (azoto) molinė masė, $\nu = \frac{m}{\mu_{N_2}}$ – molių skaičius, $T = (273 + t\ ^{\circ}\mathrm{C})$ – absoliučioji temperatūra, $R = 8{,}31\frac{\mathrm{J\,mol}}{\mathrm{K}}$ – universalioji dujų konstanta.

Tankį $\rho = \frac{m}{V}$ apskaičiuojame, suradę masę m iš (44.1) lygties ir padaliję abi puses iš V:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1{,}12\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right). \qquad (44.2)$$

Pagrindinė molekulinės kinetinės teorijos lygtis:

$$p = nkT; \qquad (44.3)$$

čia n – molekulių koncentracija, $k = \frac{R}{N_0} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ – Bolcmano konstanta.

Iš (44.3) molekulių koncentracija

$$n = \frac{p}{kT} = 2{,}41 \times 10^{25}\left(\mathrm{m}^{-3}\right). \qquad (44.4)$$

2) Molekulės masę apskaičiuojame, padalinę dujų molinę masę μ_{N_2} iš Avogadro skaičiaus $N_0 = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}:

$$m_0 = \frac{\mu_{N_2}}{N_0} = 4{,}65 \times 10^{-26}\,(\text{kg}). \qquad (44.5)$$

Molekulės masę galima apskaičiuoti ir iš formulės, siejančios dujų tankį ir molekulių koncentraciją:

$$\rho = n m_0 . \qquad (44.6)$$

Iš čia

$$m_0 = \frac{\rho}{n} = 4{,}66 \times 10^{-26}\,(\text{kg}). \qquad (44.7)$$

Rezultatų analizė. 1) Pagal (44.5) ir (44.7) formules gauti rezultatai skiriasi antruoju ženklu po kablelio dėl to, kad buvo imtos suapvalintos konstantų reikšmės. 2) Idealiųjų dujų būvio lygtis (44.1) ir pagrindinė molekulinės kinetinės teorijos lygtis (44.3) yra susietos. Iš idealiųjų dujų būvio lygties išreiškiame slėgį:

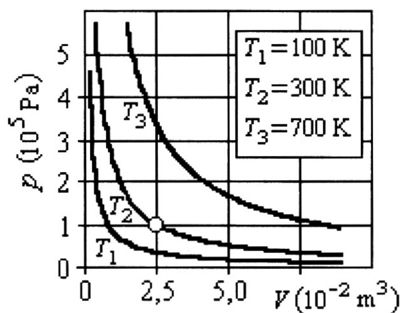
$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}. \qquad (44.8)$$

Dujų molinė masė

$$\mu = m_0 N_0 . \qquad (44.9)$$

Įrašę (44.9) į (44.8) ir atsižvelgę į ryšius $k = \frac{R}{N_0}$ bei $n = \frac{\rho}{m_0}$, gauname pagrindinę molekulinės kinetinės teorijos lygtį:

$$p = \frac{m}{V m_0} \frac{RT}{N_0} = \frac{\rho}{m_0} kT = nkT.$$



44 pav.

44 pav. pateiktos vieno idealiųjų dujų molio izotermos, esant trims skirtingoms temperatūroms. Baltu skrituliuku pažymėtas uždavinyje nagrinėjamas dujų būvis.

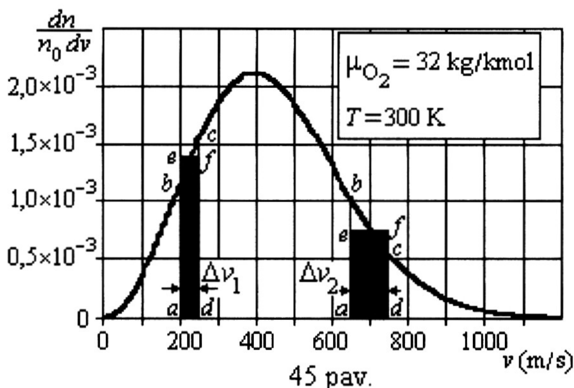
45. Dujų molekulių pasiskirstymas pagal greičius (Maksvelo skirstinys) nusakomas formule

$$\frac{dn}{n_0 dv} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2; \qquad (45.1)$$

čia $\frac{dn}{n_0 dv}$ – molekulių, kurių greičiai yra vienetiniame greičių intervale nuo v iki $(v+1)$, dalis (t. y. tokių molekulių skaičiaus dn santykis su visų n_0 molekulių skaičiumi); m_0 – molekulės masė; v – molekulių greitis; k – Bolcmano konstanta; T – absoliučioji dujų temperatūra.

45 pav. pateiktas deguonies ($m_0 = 5{,}31 \times 10^{-26}$ kg) molekulių Maksvelo skirstinys, esant temperatūrai $T = 300$ K.

Nustatykite pagal grafiką, kokia deguonies molekulių dalis šioje temperatūroje turi greičius intervaluose Δv_1 nuo 200 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ iki 250 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ir Δv_2 nuo 650 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ iki 750 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



45 pav.

Žinoma: $v_1 + \Delta v_1 = (200 + 50)\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 + \Delta v_2 = (650 + 100)\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rasti: $\dfrac{\Delta n_1}{n_0}$, $\dfrac{\Delta n_2}{n_0}$.

Sprendimas

(45.1) lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{dn}{n_0} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)v^2 dv. \qquad (45.2)$$

Tuomet molekulių, turinčių greičius intervale nuo v iki $v + \Delta v$, santykinis skaičius išreiškiamas taip:

$$\frac{\Delta n}{n_0} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_v^{v+\Delta v}\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)v^2 dv. \qquad (45.3)$$

Grafiškai (45.3) lygtį atitinka trapecijos pavidalo figūros *abcd* plotas (žr. 45 pav.). Jos pagrindas *ad* lygus greičių intervalui Δv. Plotą *abcd* galima aproksimuoti stačiakampio *aefd* plotu.

Pirmajam greičių intervalui:

$$\Delta v_1 = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \frac{\Delta n_1}{n_0 \Delta v_1} \cong 1{,}4 \times 10^{-3}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{-1}, \quad \frac{\Delta n_1}{n_0} \cong 7 \times 10^{-2} \cong 7\ \%.$$

Antrajam greičių intervalui:

$$\Delta v_2 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \frac{\Delta n_2}{n_0 \Delta v_2} \cong 7{,}5 \times 10^{-4}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{-1}, \quad \frac{\Delta n_2}{n_0} \cong 7{,}5\ \%.$$

Rezultatų analizė. 1) Molekulių, turinčių greičius intervale nuo v iki $v + \Delta v$, santykinis skaičius $\dfrac{\Delta n}{n_0}$ lygus tikimybei, kad tam tikra molekulė stebėjimo momentu turi greitį, pakliūvantį į nurodytą intervalą.

2) Jeigu (45.3) formulėje integravimo rėžiai yra nuo 0 iki ∞, funkcija $\dfrac{\Delta n}{n_0} = 1$, nes į tokį intervalą pakliūva visos molekulės (čia yra funkcijos normavimo sąlyga).

46. Inde yra idealiosios dujos, kurių masė m_1, slėgis p_1, temperatūra T_1. Iš indo išleido 20 % dujų, o inde likusių temperatūrą pakėlė 10 %. Raskite dujų slėgį inde.

Žinoma: m_1, p_1, T_1, $m_2 = 0{,}8\, m_1$, $T_2 = 1{,}1\, T_1$. *Rasti*: p_2.

Sprendimas

Pagal Klapeirono lygtį

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2 . \tag{46.1}$$

Iš čia gauname:

$$p_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{T_2}{T_1} p_1 = 0{,}88\ p_1 . \tag{46.2}$$

47. 5 litrų talpos inde yra 6,5 g dujų. Raskite dujų molekulių tikimiausią greitį, jeigu jų slėgis $p = 1{,}8 \times 10^5$ Pa.

Žinoma: $V = 5\ \text{l} = 5 \times 10^{-3}\,\text{m}^3$, $m = 6{,}5 \times 10^{-3}\,\text{kg}$, $p = 1{,}8 \times 10^5$ Pa.

Rasti: $v_{tik.}$.

Sprendimas

Tikimiausias molekulių greitis

$$v_{tik.} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} . \tag{47.1}$$

Azoto temperatūrą randame iš Klapeirono lygties:

$$T = \frac{pV\mu}{mR} . \tag{47.2}$$

Įrašę (47.2) į (47.1), gauname:

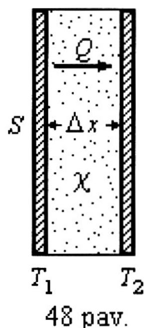
$$v_{tik.} = \sqrt{\frac{2RpV\mu}{\mu m R}} = \sqrt{\frac{2pV}{m}} = 526\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right). \tag{47.3}$$

Rezultatų analizė. Iš (47.3) gauname, kad $v_{tik.}$ galima išreikšti dujų slėgiu p ir tankiu ρ taip: $v_{tik.} = \sqrt{\dfrac{2p}{\rho}}$.

48. Atstumas tarp lango stiklų $\Delta x = 1\ \text{cm}$, jų temperatūrų skirtumas pastovus ir lygus $\Delta T = 20\ \text{K}$. Tarp stiklų yra oras, kurio šilumos laidumo koeficientas $\chi = 2{,}41 \times 10^{-2} \dfrac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}}$ (48 pav.). Koks šilumos kiekis nuteka dėl oro šilumos laidumo pro lango plotą $S = 1\ \text{m}^2$ per $t = 1\ \text{h}$? Raskite oro molekulių vidutinį laisvąjį lėkį, jei oro savitoji šiluma esant pastoviam tūriui $c_V = 718 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$, tankis $\rho = 1{,}29 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, molinė masė $\mu_{oro} = 29 \times 10^{-3} \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$, temperatūra $T = 273\ \text{K}$.

Žinoma: $S = 1\ \text{m}^2$, $\Delta x = 10^{-2}\,\text{m}$, $\rho = 1{,}29 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\Delta T = 20\ \text{K}$, $\chi = 2{,}41 \times 10^{-2} \dfrac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}}$, $t = 3600\ \text{s}$, $c_V = 718 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $T = 273\,\text{K}$, $\mu_{oro} = 29 \times 10^{-3} \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$. *Rasti*: Q.

Sprendimas



48 pav.

1) Ieškomas šilumos kiekis

$$Q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} S\, t\,; \qquad (48.1)$$

čia χ – šilumos laidumo koeficientas, $\dfrac{\Delta T}{\Delta x}$ – temperatūros gradientas, S – plotas, pro kurį teka šiluma, t – laikas. Minuso ženklas rodo, kad šiluma yra pernešama nuo šiltesnio paviršiaus prie šaltesnio, t. y. prieš temperatūros gradientą.

Įrašę į (48.1) skaitines dydžių reikšmes, gauname: $Q = 1{,}73 \times 10^5\ \text{J}$.

2) Pagal molekulinę kinetinę teoriją dujų šilumos laidumo koeficientas

$$\chi = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle c_V \rho\,; \tag{48.2}$$

čia $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – vidutinis oro molekulių greitis (žr. 45 uždavinį), $\langle\lambda\rangle$ – vidutinis molekulių laisvasis lėkis, c_V – oro savitoji šiluma esant pastoviam tūriui, ρ – oro tankis.

Iš (48.2) išreiškę $\langle\lambda\rangle$ ir įrašę dydžių skaitines reikšmes, gauname oro molekulių vidutinį laisvąjį lėkį:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\chi}{\langle v\rangle c_V \rho} = 1{,}75\times10^{-7}\,(\mathrm{m})\,. \tag{48.3}$$

Rezultatų analizė. 1) Šilumos nutekėjimas dėl oro šilumos laidumo yra viena iš būsto šilumos nuostolių priežasčių. Šiam nutekėjimui sumažinti langų stiklo paketai užpildomi argonu, kurio šilumos laidumo koeficientas yra trečdaliu mažesnis už oro laidumo koeficientą.

2) Dujų šilumos laidumo koeficientas nepriklauso nuo dujų tankio (vadinasi, ir nuo slėgio). Padidėjus dujų tankiui, tiek pat kartų sumažėja vidutinis molekulių laisvasis lėkis. (48.2) formulė rodo, kad šilumos laidumo koeficientas, kuris yra proporcingas tankio ir vidutinio molekulių laisvojo lėkio sandaugai, nepasikeis. Visos šiame uždavinyje taikytos formulės skirtos idealiųjų dujų modeliui. Realiųjų dujų savybės skiriasi nuo idealiųjų tuo daugiau, kuo didesnės yra realiųjų dujų molekulės ir kuo stipresnė yra jų sąveika per atstumą.

3) Dujų šilumos laidumo koeficientas yra tiesiog proporcingas molekulių vidutiniam greičiui $\langle v\rangle$, vadinasi, jis yra tiesiog proporcingas kvadratinei šakniai iš dujų absoliučios temperatūros ($\chi \sim \sqrt{T}$). Visi ankstesni samprotavimai tinka tik tankioms dujoms, kai molekulių laisvasis lėkis yra daug mažesnis už indo matmenis ($\langle\lambda\rangle << d$). Praretintųjų dujų savybės priklauso nuo praretinimo laipsnio.

49. Idealiųjų dujų masė m, jų molinė masė μ. Dujų molekulių laisvės laipsnių skaičius i. Dujose vyksta izobarinis procesas ($p = \text{const}$). Raskite dujoms suteikto šilumos kiekio ΔQ, jų vidinės energijos pokyčio ΔU ir atlikto darbo ΔA sąsajas.

Žinoma: m, μ, i, $p = \text{const}$. *Rasti*: $\dfrac{\Delta Q}{\Delta U}$, $\dfrac{\Delta Q}{\Delta A}$, $\dfrac{\Delta U}{\Delta A}$.

Sprendimas

Izobariniame procese dujoms suteikiamas šilumos kiekis

$$\Delta Q = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T ; \tag{49.1}$$

čia R – universalioji dujų konstanta.

Dujų vidinės energijos pokytis izobarinio proceso metu

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T . \tag{49.2}$$

Izobariniame procese dujų atliekamas darbas

$$\Delta A = p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T . \tag{49.3}$$

Iš (49.1), (49.2) ir (49.3) gauname ieškomus ryšius:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{i+2}{i} = \gamma, \text{ arba } \Delta Q = \gamma \Delta U ; \tag{49.4}$$

čia γ – adiabatės laipsnio rodiklis (Puasono koeficientas).

$$\frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{i+2}{2}, \text{ arba } \Delta Q = \frac{i+2}{2} \Delta A . \tag{49.5}$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{i}{2}, \text{ arba } \Delta U = \frac{i}{2} \Delta A . \tag{49.6}$$

Rezultatų analizė. Vykstant izobariniam procesui, dujoms suteikto šilumos kiekio ΔQ, jų vidinės energijos pokyčio ΔU ir atlikto darbo ΔA santykiai priklauso tik nuo dujų molekulių laisvės laipsnių skaičiaus i. Vienatomių dujų molekulių $i = 3$, dviatomių $i = 5$, triatomių ir daugiaatomių $i = 6$.

50. 2 kg deguonies izobariškai ($p = 2\times10^5$ Pa) išsiplėtė nuo 1 iki 1,5 litro. Kokį darbą atliko dujos? Koks šilumos kiekis buvo joms suteiktas ir kiek pakito jų vidinė energija?

Žinoma: $m = 2$ kg, $\mu = 32\times10^{-3}\dfrac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, $p = 2\times10^5$ Pa, $V_1 = 10^{-3}$ m^3, $V_2 = 1{,}5\times10^{-3}$ m^3.

Rasti: ΔA, ΔQ, ΔU.

Sprendimas

Izobarinio proceso metu atliekamas darbas

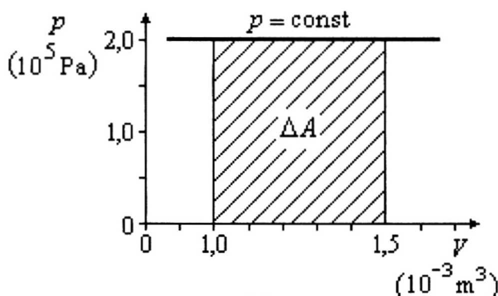
$$\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = 100(\text{J}). \qquad (50.1)$$

Izobariniame procese dujoms suteiktą šilumos kiekį ΔQ randame iš ΔQ ir atlikto darbo ΔA sąsajos, žinodami, kad dviatomių deguonies molekulių laisvės laipsnių skaičius $i = 5$ (žr. 49 uždavinį):

$$\Delta Q = \frac{i+2}{2}\Delta A = 350(\text{J}). \qquad (50.2)$$

Pagal pirmąjį termodinamikos dėsnį $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$, todėl

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A = 250(\text{J}). \qquad (50.3)$$



50 pav.

Rezultatų analizė. Izobarinio proceso metu atliekamą darbą galima rasti grafiškai. 50 pav. pateiktas izobaros grafikas, atitinkantis uždavinio sąlygas. Bet kokios izobaros grafike darbas išreiškiamas plotu, kurį riboja izobara, V ašis ir statmenys, iškelti iš V_1 ir V_2 taškų. Nagrinėjamu atveju stačiakampio plotas, kartu ir proceso atliktas darbas –

$$\Delta A = (1{,}5 - 1{,}0)\times10^{-3}\times2\times10^5 = 100(\text{J}).$$

51. 2 mol idealiųjų dujų izoterminiame procese ($T = 290$ K) atliko darbą $\Delta A = 3{,}34$ kJ. Kiek kartų pasikeitė dujų tūris ir koks šilumos kiekis buvo suteiktas dujoms?

Žinoma: $\dfrac{m}{\mu} = 2$ mol, $T = 290$ K, $\Delta A = 3{,}34 \times 10^3$ J.

Rasti: $\dfrac{V_2}{V_1}$, ΔU.

Sprendimas

Izoterminiame procese atliktas darbas

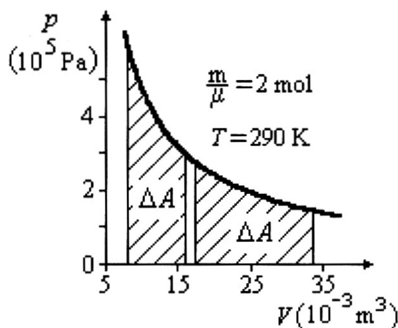
$$\Delta A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{51.1}$$

Iš (51.1) gauname:

$$\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{\Delta A \mu}{mRT}\right) = 2. \tag{51.2}$$

Izoterminio proceso metu dujų temperatūra, kartu ir vidinė energija nekinta ($T = \text{const}$, $U = \text{const}$, $\Delta U = 0$). Iš pirmojo termodinamikos dėsnio gauname:

$$\Delta Q = \Delta A = 3{,}34 \text{ kJ}. \tag{51.3}$$



51 pav.

Rezultatų analizė. 51 pav. pateiktas uždavinio sąlygas atitinkantis izotermos grafikas. Užštrichuoti plotai yra lygūs darbams, kuriuos atlieka 2 idealiųjų dujų moliai, izotermiškai besiplečiantys nuo 8 l iki 16 l ir nuo 17 l iki 34 l. Abiem atvejais gauname tą pačią atlikto darbo reikšmę $\Delta A = 3{,}34$ kJ. Iš brėžinio matome, kad, esant tam pačiam tūrio pokyčiui ΔV, dujų atliekamas darbas ΔA yra tuo didesnis, kuo didesnis yra dujų slėgis.

52. Įvykus adiabatiniam procesui, vieno molio dujų triatomių molekulių vidutinis kvadratinis greitis sumažėjo 1,2 karto. Kiek kartų pakito dujų slėgis ir tūris? Kokį darbą atliko dujos, jei jų pradinė temperatūra $T_1 = 300$ K ?

Žinoma: $\Delta Q = 0$, $\frac{m}{\mu} = 1$ mol , $i = 6$, $\frac{v_{v.kv.1}}{v_{v.kv,2}} = 1{,}2$, $T_1 = 300$ K.

Rasti: $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{V_2}{V_1}$, ΔA.

Sprendimas

1) Adiabatiniam procesui galioja lygtys:

$$pV^{\gamma} = \text{const}\,, \tag{52.1}$$

$$pT^{\gamma/1-\gamma} = \text{const}'\,, \tag{52.2}$$

$$VT^{1/\gamma-1} = \text{const}''\,; \tag{52.3}$$

čia $\gamma = \frac{i+2}{i}$ – adiabatės rodiklis (i – molekulių laisvės laipsnių skaičius, triatomių molekulių $i = 6$, $\gamma = 1{,}33$).

Molekulių vidutinis kvadratinis greitis $v_{v.kv.} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, todėl

$$\left(\frac{v_{v.kv.1}}{v_{v.kv.2}}\right)^2 = \frac{T_1}{T_2}\,. \tag{52.4}$$

Iš (52.2) gauname

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/1-\gamma}\,. \tag{52.5}$$

Įrašę į (52.5) temperatūrų santykį iš (52.4), gauname:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_{v.kv.1}}{v_{v.kv.2}}\right)^{2\gamma/1-\gamma} = 1{,}2^{-8} = 0{,}23\,. \tag{52.6}$$

Iš (52.3) randame tūrių santykį

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/\gamma-1}. \qquad (52.7)$$

Įrašę į (52.7) temperatūrų santykį iš (52.4), gauname:

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{v_{v.kv.1}}{v_{v.kv.2}}\right)^{2/\gamma-1}=1{,}2^6=2{,}99. \qquad (52.8)$$

2) Adiabatiniame procese dujos atlieka darbą

$$\Delta A=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}R(T_1-T_2). \qquad (52.9)$$

Iš (52.4) apskaičiuojame T_2:

$$T_2=T_1\left(\frac{v_{v.kv.2}}{v_{v.kv.1}}\right)^2=208(\text{K}). \qquad (52.10)$$

Įrašę į (52.9) dydžių reikšmes, gauname $\Delta A = 2{,}29$ kJ.

Rezultatų analizė. Aptarkime adiabatinį procesą. (52.1) lygtis rodo, kad, vykstant adiabatiniam procesui, dujų slėgis didėja, jeigu mažėja jų tūris, ir atvirkščiai. Slėgio kitimas yra staigesnis už kitimą izoterminiame procese (primename, kad izoterminio proceso lygtis $pV=\text{const}$).

(52.2) lygtis rodo, kad, vykstant adiabatiniam procesui, dujų slėgis didėja, jeigu mažėja jų temperatūra, ir atvirkščiai, todėl, kad T laipsnio rodiklis yra neigiamasis ($\gamma>1$, $\frac{\gamma}{1-\gamma}<0$).

(52.3) lygtis rodo, kad adiabatinio proceso metu dujų temperatūra didėja, jeigu mažėja jų tūris, ir atvirkščiai (adiabatiškai besiplečiančios ne į vakuumą dujos atvėsta dėl to, kad atlieka darbą prieš išorinę jėgą).

53. Termodinaminį ciklą *1231* V, p koordinatėse (53.1 pav.) sudaro izochorinis *12* ($V_1 = V_2 = 0{,}04\ \text{m}^3$, $p_1 = 10^5\ \text{Pa}$, $p_2 = 2\times10^5\ \text{Pa}$), izoterminis *23* ($T_2 = T_3 = 600\ \text{K}$) ir izobarinis *31* ($p_3 = p_1 = 10^5\ \text{Pa}$) procesai. Pavaizduokite šį ciklą T, V ir T, p koordinatėse.

Sprendimas

Apskaičiuokime tuos ciklo procesų pradinių bei galinių būvių parametrus, kurių nėra sąlygoje. Pagal Klapeirono lygtį

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3}; \qquad (53.1)$$

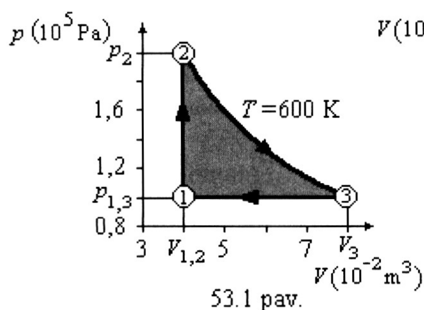
iš čia: $T_1 = \dfrac{p_1V_1}{p_2V_2}T_2 = 300(\text{K})$, $V_3 = \dfrac{p_1T_3}{p_3T_1}V_1 = 0{,}08(\text{m}^3)$.

Vadinasi, procesų pradinių bei galinių būvių parametrai (grafikų taškų koordinatės) yra šie:

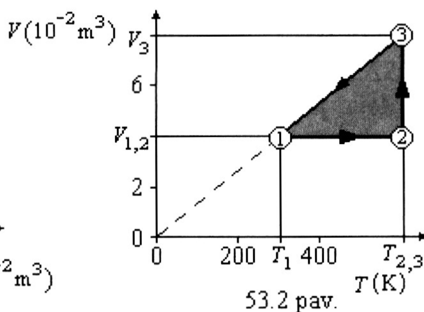
① – $p_1 = 10^5\ \text{Pa}$, $V_1 = 0{,}04\ \text{m}^3$, $T_1 = 300\ \text{K}$.

② – $p_2 = 2\times10^5\ \text{Pa}$, $V_2 = V_1 = 0{,}04\ \text{m}^3$, $T_2 = 600\ \text{K}$.

③ – $p_3 = p_1 = 10^5\ \text{Pa}$, $V_3 = 0{,}08\ \text{m}^3$, $T_3 = T_2 = 600\ \text{K}$.



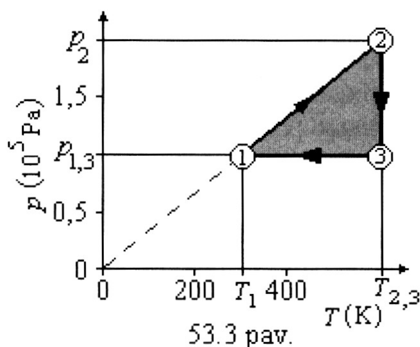
53.1 pav.



53.2 pav.

T, V koordinatėse (53.2 pav.) dedame pirmąjį tašką (T_1, V_1). Horizontalioji atkarpa iki antrojo taško (T_2, V_1) vaizduoja izochorinį procesą (dujų tūris nekinta, temperatūra didėja nuo T_1 iki T_2, proporcingai temperatūrai nuo p_1 iki p_2 didėja slėgis, kuris šioje

diagramoje nevaizduojamas). Iš antrojo taško (T_2, V_1) vertikalioji atkarpa iki trečiojo taško (T_2, V_3) vaizduoja izoterminį procesą (dujų temperatūra nekinta, tūris didėja nuo V_1 iki V_2, atvirkščiai proporcingai tūriui kinta nuo p_1 iki p_2 slėgis, kuris šioje diagramoje nevaizduojamas). Trečiasis taškas (T_2, V_3) turi būti vienoje tiesėje su pirmuoju tašku (T_1, V_1) ir koordinačių pradžia $(0{,}0)$, nes iš trečiojo taško turime grįžti į pirmąjį tašką pagal izobaros tiesę (slėgis nekinta, dujų temperatūra mažėja nuo T_2 iki T_1, tūris proporcingai mažėja nuo V_1 iki V_2). T, p koordinatėse (53.3 pav.) dedame pirmąjį tašką (T_1, p_1). Iš jo tiesiame atkarpą iki antrojo taško (T_2, p_2) taip, kad atkarpos tęsinys eitų per koordinačių pradžią $(0{,}0)$. Ši atkarpa vaizduoja izochorinį procesą (dujų tūris nekinta, temperatūra didėja nuo T_1 iki T_2, slėgis didėja nuo p_1 iki p_2 proporcingai temperatūrai). Vertikalioji atkarpa tarp antrojo (T_2, p_2) ir trečiojo (T_2, V_3) taškų vaizduoja izoterminį procesą (dujų temperatūra nekinta, slėgis mažėja nuo p_2 iki p_3, dujos plečiasi nuo V_2 iki V_3). Trečiasis taškas (T_2, p_3) turi būti vienoje horizontalėje su pirmuoju tašku (T_1, p_1), nes iš trečiojo taško turime grįžti į pirmąjį pagal izobaros grafiką (slėgis nekinta, dujų temperatūra mažėja nuo T_2 iki T_1, tūris proporcingai mažėja nuo V_3 iki V_1). 53.1–54.3 pav. ciklo ribojamas plotas, lygus dujų šiame cikle atliktam darbui, yra patamsintas.

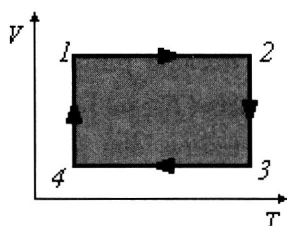


53.3 pav.

54. 54.1 pav. pateikta termodinaminio ciklo diagrama T,V koordinatėse (be skaitinių dydžių reikšmių). Ciklas vaizduojamas stačiakampiu, kurio kraštinės yra lygiagrečios T ir V ašims. Schemiškai nubrėžkite šio ciklo diagramas V,p ir T,p koordinatėse.

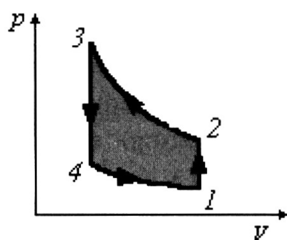
Sprendimas

Išnagrinėkime 54.1 pav. grafiko vaizduojamą ciklą. Jį sudaro du izochoriniai (*12* ir *34*) ir du izoterminiai (*23* ir *41*) procesai. Akivaizdu, kad izochorinis procesas *12* vyksta, kai tūris didesnis(t. y. kai slėgis mažesnis), lyginant su procesu *34* o izoterminis procesas *23* – esant aukštesnei temperatūrai, lyginant su procesu *41*.



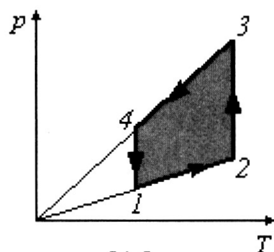
54.1 pav.

Pavaizduokime ciklą V,p koordinatėse (54.2 pav.). Izochorinio proceso *12* metu tūris didėja tiesiog proporcingai absoliučiai temperatūrai. Izoterminis procesas *23* (jo lygtis $pV = \text{const}$) vaizduojamas hiperbole. Izochoriniame procese *34* slėgis mažėja tiesiogiai proporcingai absoliučiajai temperatūrai (atkarpa *34* yra ilgesnė už atkarpą *12*, nes procesas *34* vyksta mažesniame tūryje, taigi slėgių pokytis, esant tam pačiam temperatūros pokyčiui ΔT turi būti didesnis).



54.2 pav.

T,p koordinatėse (54.3 pav.) braižome du izochorinius procesus *12* ir *34* (juos vaizduojančių atkarpų tęsiniai turi eiti per T,p koordinačių pradžią) bei du izoterminius procesus *23* ir *41* (atkarpa *23* yra ilgesnė už atkarpą *41*, nes procesas *23* vyksta aukštesnėje temperatūroje).



54.3 pav.

55. Šiluminis variklis veikia pagal Karno ciklą. Šildytuvo temperatūra $T_1 = 800\ \text{K}$, aušintuvo temperatūra $T_2 = 560\ \text{K}$. Variklio galia $W = 88{,}9\ \text{kW}$. Raskite variklio naudingumo koeficientą η ir šilumos kiekius, kuriuos gauna iš šildytuvo (Q_1) ir atiduoda aušintuvui (Q_2) variklis per vieną valandą.

Žinoma: $T_1 = 800\ \text{K}$, $T_2 = 560\ \text{K}$, $W = 88{,}9\ \text{kW} = 8{,}89 \times 10^4\ \text{W}$, $t = 1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$.

Rasti: η, Q_1, Q_2.

Sprendimas

Bet kokio šiluminio variklio našumo koeficientas

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}; \qquad (55.1)$$

čia $A = Wt$ – per laiką t variklio atliktas darbas, Q_1 ir Q_2 – per tą patį laiką variklio gautas ir atiduotas šilumos kiekiai.

Pagal Karno ciklą veikiančio variklio našumo koeficientas gali būti išreikštas ir absoliučiosiomis temperatūromis:

$$\eta_{K.} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \qquad (55.2)$$

čia T_1 ir T_2 – šildytuvo ir aušintuvo absoliučiosios temperatūros.

Į (55.2) įrašę temperatūrų reikšmes, gauname $\eta_{K.} = 0{,}3$.

Iš (55.1) ir pirmojo termodinamikos dėsnio gauname:

$$\eta = \frac{A}{A + Q_2} = \frac{Wt}{Wt + Q_2}. \qquad (55.3)$$

Pagal sąlygą $\eta = \eta_{K.}$, todėl iš (55.3) –

$$Q_2 = \frac{Wt(1-\eta)}{\eta} = 7{,}47 \times 10^8\ (\text{J}). \qquad (55.4)$$

Variklio gautas šilumos kiekis

$$Q_1 = Q_2 + A = Q_2 + W \cdot t = 1{,}07 \times 10^9\ (\text{J}). \qquad (55.5)$$

56. Pagal Karno ciklą veikiančio šiluminio variklio naudingumo koeficientas $\eta = 0{,}4$. Raskite variklio naudingumo koeficientus, jei: 1) šildytuvo temperatūra padidėjo $25\,\%$; 2) aušintuvo temperatūra sumažėjo $25\,\%$.

Žinoma: $\eta = 0{,}4$; $T_1' = 1{,}25\,T_1$; $T_2'' = 0{,}75\,T_2$.

Rasti: η', η''.

Sprendimas

Karno ciklu veikiančio variklio naudingumo koeficientas

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \tag{56.1}$$

čia T_1 ir T_2 – šildytuvo ir aušintuvo absoliučiosios temperatūros.

1) Jei šildytuvo temperatūra padidėja $25\,\%$, naudingumo koeficientas tampa

$$\eta' = 1 - \frac{T_2}{1{,}25\,T_1}. \tag{56.2}$$

(56.2) lygtis rodo, kad, kylant šildytuvo temperatūrai, naudingumo koeficientas didėja (iš vieneto atimama mažesnė trupmena).

Iš (56.1) gauname temperatūrų santykį:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta. \tag{56.3}$$

(56.3) įrašę į (56.2), gauname:

$$\eta' = 1 - \frac{1-\eta}{1{,}25} = 0{,}52. \tag{56.4}$$

2) Jei aušintuvo temperatūra sumažėjo $25\,\%$,

$$\eta'' = 1 - \frac{0{,}75\,T_2}{T_1}. \tag{56.5}$$

(56.5) lygtis rodo, kad, mažėjant šildytuvo temperatūrai, naudingumo koeficientas didėja.

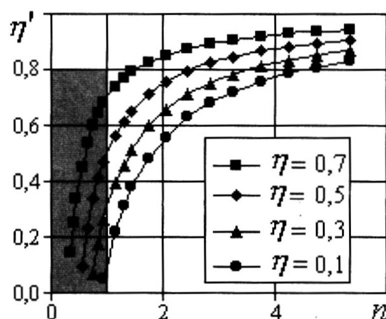
(56.3) įrašę į (56.5), gauname:

$$\eta'' = 1 - 0{,}75(1-\eta) = 0{,}55. \tag{56.6}$$

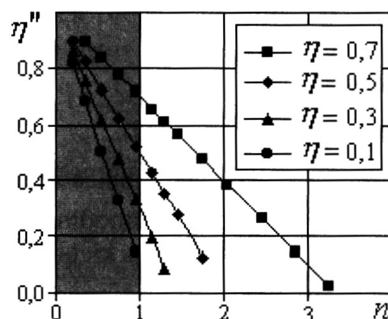
Rezultatų analizė. Uždavinio sprendimo rezultatai patvirtina teiginį, kad šiluminio variklio naudingumo koeficientas η didėja, keliant šildytuvo temperatūrą arba mažinant aušintuvo temperatūrą. Išnagrinėkime η priklausomybės nuo šildytuvo bei aušintuvo temperatūrų kitimo bendruosius atvejus.

1) Tarkime, kad šiluminio variklio, kurio pradinis naudingumo koeficientas lygus η, šildytuvo temperatūra pakito n kartų. Tada, atsižvelgę į (56.3), naują naudingumo koeficientą galima užrašyti taip:

$$\eta' = 1 - \frac{T_2}{nT_1} = \frac{\eta + n - 1}{n}. \tag{56.7}$$



56.1 pav.



56.2 pav.

56.1 pav. pateikti šios lygties grafikai, esant skirtingoms pradinio naudingumo koeficiento η reikšmėms. Patamsinta grafiko sritis atitinka šildytuvo temperatūros mažinimo atvejį $(n < 1)$.

2) Keičiant šaldytuvo temperatūrą n kartų, naujas variklio naudingumo koeficientas $\eta'' = 1 - \frac{nT_2}{T_1} = 1 - n(1 - \eta)$. Šios lygties grafikai pateikti 56.2 pav. Patamsinta grafiko sritis atitinka šaldytuvo temperatūros mažinimo atvejį $(n < 1)$. Techniškai yra daug paprasčiau kelti šildytuvo temperatūrą, o ne mažinti aušintuvo temperatūrą, todėl variklių naudingumo koeficientai paprastai didinami pirmuoju būdu.

57. 10 g deguonies izotermiškai išsiplėtė nuo $V_1 = 25 \text{ l}$ iki $V_2 = 40 \text{ l}$. Raskite deguonies entropijos pokytį.

Žinoma: $m = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$, $\mu = 3{,}2 \times 10^{-2} \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$, $T = \text{const}$, $V_1 = 25 \text{ l}$, $V_2 = 40 \text{ l}$.

Rasti: ΔS.

Sprendimas

Entropijos pokytis

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad (57.1)$$

Izoterminio proceso temperatūra yra pastovi, todėl nagrinėjamu atveju galioja:

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{\Delta Q}{T}; \qquad (57.2)$$

čia ΔQ – deguonies gautas šilumos kiekis.

Pagal pirmąjį termodinamikos dėsnį izoterminiame procese deguonies gautas šilumos kiekis

$$\Delta Q = \Delta A. \qquad (57.3)$$

Izotermiškai besiplečiančios deguonies atliktas darbas

$$\Delta A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (57.4)$$

Atsižvelgę į (57.3) ir (57.4), lygtį (57.2) galima užrašyti taip:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (57.5)$$

Įrašę į (57.5) skaitines dydžių reikšmes, gauname $\Delta S = 1{,}22 \dfrac{\text{J}}{\text{K}}$.

Rezultatų analizė. 1) (57.1) lygtį galima taikyti tik grįžtamiesiems procesams. Izoterminis procesas yra grįžtamasis. Izotermiškai besiplečiančių dujų entropijos pokytis nepriklauso nuo temperatūros, o priklauso tik nuo dujų kiekio bei plėtimosi laipsnio.

58. 4 litrų tūrio inde yra 0,15 kg azoto esant 300 K temperatūrai. Laikydami azotą realiosiomis dujomis, raskite, kokią indo tūrio V dalį užima savasis azoto molekulių tūris V' ir kokią azoto slėgio p į indo sieneles dalį sudaro vidinis slėgis p'. Van der Valso pataisos azotui yra šios: $a = 0{,}135\dfrac{\mathrm{Nm}^4}{\mathrm{mol}^2}$, $b = 3{,}86\times10^{-5}\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}$.

Žinoma: $V = 4\ \mathrm{l} = 4\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, $m = 0{,}15 kg$, $\mu = 2{,}8\times10^{-2}\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$.

Rasti: $k_1 = \dfrac{V'}{V}$, $k_2 = \dfrac{p'}{p}$.

Sprendimas

Realiųjų dujų būvio (van der Valso) lygtis:

$$\left(p + {\nu^2 a}/{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT\ ; \qquad (58.1)$$

čia p, V ir T – dujų slėgis, tūris ir temperatūra, $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ – molių skaičius, R – universalioji dujų konstanta, a ir b – realiųjų dujų van der Valso pataisos. Sandauga νb yra lygi keturgubam savajam molekulių tūriui, t. y.

$$\nu b = 4V'. \qquad (58.2)$$

Iš čia randame V' ir apskaičiuojame $k_1 = \dfrac{V'}{V}$:

$$k_1 = \frac{mb}{4\mu V} = 0{,}0129 = 1{,}29\ \%. \qquad (58.3)$$

Vidinis slėgis, kurį sukuria molekulių tarpusavio trauka, išreiškiamas molių skaičiumi, dujų tūriu ir pataisa a taip:

$$p' = \frac{\nu^2 a}{V^2} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}. \qquad (58.4)$$

Įrašę į (58.4) skaitines dydžių reikšmes, gauname:

$p' = 0{,}242$ MPa.

Azoto slėgį į indo sieneles apskaičiuojame, išreiškę slėgį iš van der Valso lygties:

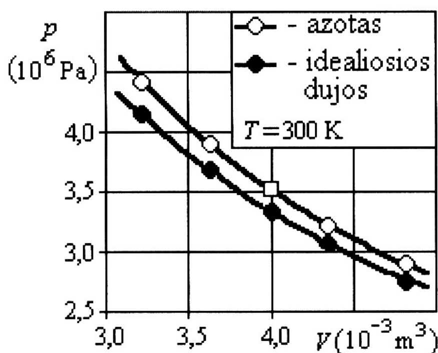
$$p = \frac{mRT}{\mu V - mb} - \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2} = 3{,}28\ (\text{MPa}). \qquad (58.5)$$

Vadinasi, santykis

$$k_2 = \frac{p'}{p} = \frac{0{,}242}{3{,}28} = 0{,}074 = 7{,}4\ \%.$$

Rezultatų analizė. Skaičiavimai parodė, kad uždavinyje apibrėžtomis sąlygomis azotas pastebimai skiriasi nuo idealiųjų dujų. Jo molekulių savasis tūris sudaro 1,29 % viso azoto užimamo tūrio (idealiųjų dujų modelyje molekulių savasis tūris laikomas lygus nuliui), o molekulių tarpusavio traukos sukurtas vidinis slėgis sudaro 7,4 % azoto slėgio į indo sieneles (idealiųjų dujų modelyje molekulių sąveikos per atstumą nepaisoma).

58 pav. pateiktos idealiųjų dujų (juodi skrituliukai) ir azoto (balti skrituliukai) izotermos esant uždavinyje nurodytoms sąlygoms.



58 pav.

Uždavinio sąlygos nusakytą dujų būseną atitinkantis taškas pažymėtas baltu kvadratuku. Dujų tūrio ir slėgio kitimas imamas į abi puses nuo šio taško. Iš grafiko matome, kad azoto (realiųjų dujų) izoterma išsidėsto aukščiau nei idealiųjų dujų izoterma. Kai temperatūra mažesnė, šis skirtumas padidėja.

59. Kiek $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$ temperatūros ledo turime įmesti į $50\ \mathrm{g}$ masės stiklinį indą su $100\ \mathrm{g}$ vandens, kurių temperatūra $30\,^{\circ}\mathrm{C}$, kad gautume $12\,^{\circ}\mathrm{C}$ vandenį? Sistemą laikome termiškai izoliuota. Stiklo savitoji šiluma $c_1 = 6{,}7 \times 10^2 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$, vandens savitoji šiluma $c_2 = 4{,}2 \times 10^3 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$, ledo savitoji šiluma $c_3 = 2{,}1 \times 10^2 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$, ledo savitoji lydymosi šiluma $\lambda = 3{,}2 \times 10^5 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$.

Žinoma: $m_1 = 0{,}05\ \mathrm{kg}$; $m_2 = 0{,}1\ \mathrm{kg}$; $c_1 = 6{,}7 \times 10^2 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $c_2 = 4{,}2 \times 10^3 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $c_3 = 2{,}1 \times 10^3 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $\lambda = 3{,}2 \times 10^5 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $t_1 = t_2 = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$; ; $t_3 = -10\,^{\circ}\mathrm{C}$; $t = 12\,^{\circ}\mathrm{C}$. (Sprendinio formulėse yra temperatūrų skirtumai, todėl galima palikti Celsijaus temperatūrų skalę.) *Rasti*: m_3.

Sprendimas

Termiškai izoliuotos ir darbo nebeatliekančios sistemos vidinė energija nekinta. Šilumos mainai vyksta tik sistemos viduje. Todėl vienų sistemos kūnų atiduotų šilumos kiekių suma turi būti lygi kitų kūnų gautų šilumos kiekių sumai. Nagrinėjamu atveju kūnai atiduoda šiuos šilumos kiekius:

šąlanti nuo t_1 iki t stiklinė $Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t)$;

šąlantis nuo t_1 iki t vanduo $Q_2 = c_2 m_2 (t_1 - t)$.

Gauna šilumos kiekius:

šildomas nuo t_3 iki $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ ledas $Q_3' = c_3 m_3 (0 - t_3)$;

tirpstantis ledas $Q_3'' = \lambda m_3$;

gautas iš ledo $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ temperatūros ir šildomas iki t temperatūros vanduo $Q_3''' = c_2 m_3 (t_1 - t)$.

Užrašome šilumos balanso lygtį:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3' + Q_3'' + Q_3'''. \tag{59.1}$$

Įrašę į (59.1) šilumos kiekių išraiškas, gauname:

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_1 - t) = c_3 m_3 (0 - t_3) + \lambda m_3 + c_2 m_3 (t - 0). \tag{59.2}$$

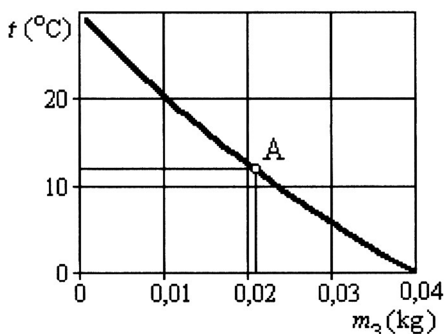
Iš (59.2) randame ledo masę ir apskaičiuojame jos dydį:

$$m_3 = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_1 - t)}{c_3(0 - t_3) + \lambda m_3 + c_2(t - 0)} = 0{,}021(\text{kg}). \tag{59.3}$$

Rezultatų analizė. 1) Jeigu apskaičiuotume gautų bei atiduotų šilumos kiekių skaitines reikšmes, pamatytume, kad daugiausia šilumos sunaudojama ledui ištirpinti, nes ledo savitoji lydymosi šiluma yra labai didelė. Vykstant atvirkščiam procesui – vandens užšalimui – tokie patys šilumos kiekiai išsiskiria. Su ledo tirpimu ir vandens užšalimu jūrose bei dideliuose ežeruose ir šio proceso metu sunaudojamais ir išsiskiriančiais dideliais šilumos kiekiais siejami meteorologiniai procesai.

2) Išanalizuokime, kaip priklauso atšaldyto vandens temperatūra t nuo įmesto ledo masės m_3. Iš (59.3) galima gauti tokią $t(m_3)$ funkciją:

$$t = \frac{1{,}3 \times 10^4 - 3{,}4 \times 10^5 m_3}{4{,}5 \times 10^2 + 4{,}2 \times 10^3 m_3}. \tag{59.4}$$



59 pav.

Šios funkcijos grafikas pateiktas 59 pav. Taškas A atitinka uždavinyje nagrinėjamo atvejo parametrus.

Jei įmesto $-10\,^\circ\text{C}$ temperatūros ledo masė būtų 0,04 kg, vandens temperatūra taptų $0\,^\circ\text{C}$ (grafiko kreivės apatinis galas). Esant ledo masei didesnei nei 0,04 kg, ištirptų ne visas ledas.

60. Statybinėje konstrukcijoje susidarė plonas plyšys, kurio storis $d = 1{,}5 \times 10^{-5}$ m visur vienodas. Į kokį aukštį pakils šiuo plyšiu vanduo, jei konstrukcijos medžiagos ir vandens sąlyčio kampas yra $\varphi = 30^{\circ}$. Vandens tankis $\rho = 10^{3}\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, vandens paviršiaus įtempimo koeficientas (kai temperatūra $t = 23\ ^{\circ}\text{C}$) $\sigma = 0{,}072\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.

Žinoma: $d = 1{,}5 \times 10^{-5}$ m, $\varphi = 30^{\circ}$, $\rho = 10^{3}\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\sigma = 0{,}072\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.

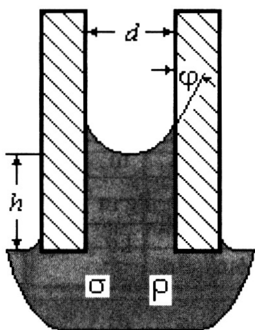
Rasti: h.

Sprendimas

Pagal Laplaso formulę, esant cilindriniam skysčio paviršiui, pastovaus storioploname plyšyje (žr. 60 pav.) skystis pakyla į aukštį

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{\rho g d}; \qquad (60.1)$$

čia σ – paviršiaus įtempimo koeficientas, φ – plyšio sienelių medžiagos ir skysčio sąlyčio kampas, ρ – skysčio tankis, g – laisvojo kritimo pagreitis, d – plyšio storis.



60 pav.

Įrašę į (60.1) lygtį skaitines dydžių reikšmes, gauname $h = 0{,}85$ m.

Rezultatų analizė. Skysčių pakilimo aukštis kapiliaruose priklauso nuo skysčio paviršiaus įtempimo koeficiento (pavyzdžiui, gyvsidabrio paviršiaus įtempimo koeficientas yra 6,5 karto didesnis už vandens); skysčio ir drėkinamos medžiagos sąlyčio kampo φ ($0 \le \varphi < 90^{\circ}$, jei skystis drėkina tam tikrą medžiagą, ir $90^{\circ} < \varphi \le 180^{\circ}$, jei skystis jos nedrėkina); skysčio tankio ρ (pavyzdžiui, gyvsidabrio tankis yra 13,5 karto didesnis už vandens tankį).

I priedas. **Pagrindinių uždavinyne taikomų fizikinių dydžių žymėjimai ir SI sistemos matavimo vienetai**

Dydžio žymėjimas	Fizinis dydis	Matavimo vienetas (SI)
$\vec{a}$, a	pagreitis	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
A	darbas	J
c_p	savitoji šiluma esant pastoviajam slėgiui	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$
c_V	savitoji šiluma esant pastoviajam tūriui	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$
C_p	molinė šiluma esant pastoviajam slėgiui	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$
C_V	molinė šiluma esant pastoviajam tūriui	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$
d	atstumas, matmuo, skersmuo	m
E_k	kinetinė energija	J
E_p	potencinė energija	J
$\vec{F}$, F	jėga	N
$\vec{g}$, g	laisvojo kritimo pagreitis	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
h, H	aukštis	m
I	inercijos momentas	$\mathrm{kg\,m}^2$
k	tamprumo koeficientas	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$
l, L	ilgis, atstumas	m
$\vec{L}$, L	impulso (judesio kiekio) momentas	$\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$

I priedo tęsinys

Dydžio žymėjimas	Fizikinis dydis	Matavimo vienetas (SI)
L	garso intensyvumo lygis	dB
m	masė	kg
$\vec{M}$, M	jėgos momentas	N m
p	slėgis	Pa
Q, ΔQ	šilumos kiekis	J
$\vec{r}$	poslinkis	m
r, R	spindulys	m
r	pasipriešinimo koeficientas	$\frac{kg}{s}$
s, S	kelias	m
S	plotas	m^2
S	entropija	$\frac{J}{K}$
t	laikas	s
T	svyravimų periodas	s
T	absoliučioji temperatūra	K
U	vidinė energija	J
$\vec{v}$, $\vec{\mathrm{v}}$, v	greitis	$\frac{m}{s}$
V	tūris	m^3
W	galia	W
γ	adiabatės (Puasono) rodiklis	bedimensis

I priedo tęsinys

β	slopinimo koeficientas	s^{-1}
ε	kampinis pagreitis	s^{-2}
λ	bangos ilgis	m
λ	logaritminis slopinimo dekrementas	bedimensis
λ	laisvasis molekulės lėkis	m
λ	šilumos laidumo koeficientas	$\frac{J}{m \cdot s \cdot K}$
μ	molinė masė	$\frac{kg}{mol}$
ν	dažnis	Hz
ν	molių skaičius	mol
φ, $\Delta\varphi$	kampinis poslinkis	rad
ρ	tankis	$\frac{kg}{m^3}$
$\vec{\omega}$, ω	kampinis greitis, ciklinis dažnis	Hz

II priedas. **Uždavinyne taikomos fizikinės konstantos**

Fizikinis dydis	Žymėjimas	Reikšmė	SI matavimo vienetas
Šviesos greitis vakuume	c	$2{,}998 \times 10^{8}$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Gravitacijos konstanta	G	$6{,}672 \times 10^{-11}$	$\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$
Avogadro skaičius	N_A	$6{,}022 \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
Bolcmano konstanta	k	$1{,}381 \times 10^{-23}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
Universalioji dujų konstanta	R	$8{,}314$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$

III priedas. **Kartotiniai ir daliniai vienetai**

Koeficientai	Vieneto pirmasis dėmuo	Pirmojo dėmens žymėjimas	Pavyzdžiai
10^{18}	eksa-	E	eksabekerelis (EBq)
10^{15}	peta-	P	petahercas (PHz)
10^{12}	tera-	T	teradžaulis (TJ)
10^{9}	giga-	G	giganiutonas (GN)
10^{6}	mega-	M	megaomas (MΩ)
10^{3}	kilo-	k	kilopaskalis (kPa)
10^{2}	hekto-	h	hektovatas (hW)
10^{1}	deka-	da	dekalitras (dal)
10^{-1}	deci-	d	decibelas (dB)
10^{-2}	centi-	c	centimetras (cm)
10^{-3}	mili-	m	milivoltas (mV)
10^{-6}	mikro-	μ	mikroamperas (μA)
10^{-9}	nano-	n	nanosekundė (ns)
10^{-12}	piko-	p	pikofaradas (pF)
10^{-15}	femto-	f	femtogramas (fg)
10^{-18}	ato-	a	atokulonas (aC)

IV priedas. **Pagrindinės diferencijavimo ir integravimo formulės**

$$dC = 0 \quad (C = \text{const})$$
$$d(u + v - w) = du + dv - dw$$
$$d(Cu) = C\,du \quad (C = \text{const})$$
$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$
$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$
$$d\left(x^n\right) = n\,x^{n-1}dx$$
$$d\left(e^x\right) = e^x dx$$
$$d(\sin x) = \cos x\,dx$$
$$d(\cos x) = -\sin x\,dx$$
$$d(\mathrm{tg}\,x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$d(\mathrm{ctg}\,x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$$
$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$
$$d\left(a^x\right) = a^x \ln a\,dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + C_1$$

Literatūra

1. KARPUS, A. Mechanika, paskaitos. Vilnius: Enciklopedija, 2002. 158 p.
2. TAMAŠAUSKAS, A. Fizika 1. Vilnius: Mokslas, 1987. 224 p.
3. TAMAŠAUSKAS, A.; VOSYLIUS, J. Fizika 2. Vilnius: Mokslas, 1989. 195 p.
4. RESNIK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. Physics. Volume 1. 5^{th} ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2002, p. 1566.
5. HALLIDAY, D.; RESNIK, R.; KRANE, K. S. Physics, Volume 2. 5^{th} ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002, p. 567–1198.
6. САВЕЛЬЕВ, И. В. Курс физики. Т. 1. Москва: Наука, 1989. 350 с.
7. САВЕЛЬЕВ, И. В. Курс физики. Т. 2. Москва: Наука, 1978. 480 с.
8. НОВОДВОРСКАЯ, Е. М.; ДМИТРИЕВ, Э. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе. Москва: Высшая школа, 1981. 319 с.

Aleksėjus Bogdanovičius
FIZIKA 1. AIŠKINAMASIS UŽDAVINYNAS

Redaktorė Stasė Kirkienė

3-ioji laida

2009 09 10. 5,75 sp. l.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika"
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius
Spausdino AB „Aušra", Vytauto pr. 23, 44352 Kaunas
Užsakymas 880